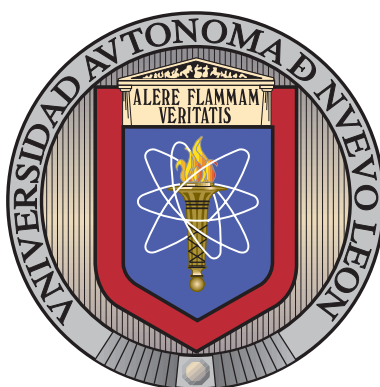


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



MÉTODOS CONSTRUCTIVOS BASADOS EN  
RELAJACIÓN LAGRANGIANA PARA EL  
PROBLEMA DE PLANEACIÓN DE HORARIOS A  
EMPLEADOS

POR

NORBERTO ALEJANDRO HERNÁNDEZ LEANDRO

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS

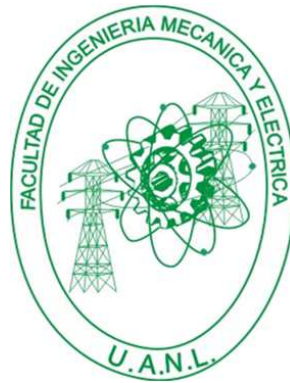
EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

JUNIO, 2015

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



MÉTODOS CONSTRUCTIVOS BASADOS EN  
RELAJACIÓN LAGRANGIANA PARA EL  
PROBLEMA DE PLANEACIÓN DE HORARIOS A  
EMPLEADOS

POR

NORBERTO ALEJANDRO HERNÁNDEZ LEANDRO

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS

EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

JUNIO, 2015

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**Subdirección de Estudios de Posgrado**

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Métodos Constructivos Basados en Relajación Lagrangiana para el Problema de Planeación de Horarios a Empleados», realizada por el alumno Norberto Alejandro Hernández Leandro, con número de matrícula 1654715, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

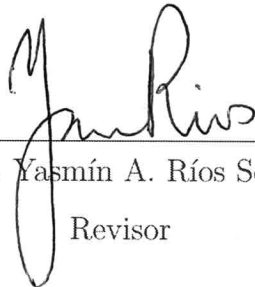
El Comité de Tesis



---

Dr. Vincent André Lionel Boyer

Asesor



---

Dra. Yasmín A. Ríos Solís

Revisor

---

Prof. Louis-Martin Rousseau

Revisor

Vo. Bo.

---

Dr. Simón Martínez Martínez

Subdirección de Estudios de Posgrado

*A mis padres.*

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>XIII</b>
<b>Resumen</b>	<b>xv</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Problema de Asignación de Horarios a empleados . . . . .	1
1.2. Motivación y justificación . . . . .	4
1.3. Objetivo de la Investigación . . . . .	5
1.4. Plan de Trabajo . . . . .	5
<b>2. Revisión de Literatura</b>	<b>7</b>
2.1. Problema de planeación de horarios a empleados con múltiples actividades . . . . .	7
2.2. Métodos Heurísticos Basados en Relajación Lagrangiana para el Problema de Cubrimiento (Set-Covering) . . . . .	11
<b>3. Marco Teórico</b>	<b>14</b>
3.1. Gramáticas Libres de Contexto . . . . .	14
3.2. Grafo Acíclico Dirigido $\Gamma$ . . . . .	17

---

3.3. Representación de Turnos con Gramáticas Libres de Contexto . . . . .	18
3.4. Modelo de <i>set-covering</i> para el Problema de Asignación de Turnos a Empleados con Múltiples Actividades . . . . .	20
<b>4. Método Constructivo Basado en Relajación Lagrangiana</b>	<b>22</b>
4.1. Relajación Lagrangiana del Modelo de Asignación de Horarios a Empleados . . . . .	22
4.2. Resolución de los Subproblemas . . . . .	24
4.3. Optimización de los Multiplicadores $\Lambda$ . . . . .	29
4.4. Experimentación . . . . .	30
<b>5. Métodos Constructivos por Etapas</b>	<b>33</b>
5.1. Método de Asignación de Empleados por Etapas . . . . .	33
5.1.1. Descripción del Método . . . . .	34
5.1.2. Experimentación . . . . .	36
5.2. Método de Asignación de Turnos por Etapas . . . . .	37
5.2.1. Descripción del Método . . . . .	38
5.2.2. Experimentación . . . . .	40
<b>6. Método Híbrido Basado en Relajación Lagrangiana</b>	<b>42</b>
6.1. Descripción del Método Híbrido . . . . .	42
6.2. Experimentación . . . . .	44
<b>7. Conclusiones</b>	<b>46</b>

---

<b>8. Trabajo a Futuro</b>	<b>49</b>
<b>A. Instancias</b>	<b>51</b>
<b>B. Apéndice: Tablas</b>	<b>53</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

1.1. Demandas de la actividad $a$ . . . . .	2
1.2. Ejemplo de asignación de la actividad $a$ . . . . .	3
1.3. Demandas de la actividad $a$ después de la asignación . . . . .	3
3.1. Árboles de derivación de las palabras de tres letras generadas por la gramática $G$ del Ejemplo 3.4 . . . . .	16
3.2. GAD $\Gamma$ del la gramática del Ejemplo 3.4 para palabras de tres letras .	19
4.1. Solución gráfica del Ejemplo 4.1 . . . . .	28
4.2. Ejemplo de dos empleados con turnos que se traslapan. . . . .	32
5.1. Ejemplo de dos empleados con turnos que no se traslapan. . . . .	34



# ÍNDICE DE TABLAS

---

3.1. Derivaciones de las palabras aab (a) y abb (b) . . . . .	15
5.1. Comparativa de resultados de método de asignación de turnos por etapas. . . . .	40
7.1. Tabla comparativa de los métodos propuestos. . . . .	48
B.1. Resultados del método basado en la relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 7 días, 20 empleados y 5 actividades (7_20_5_s1). . . . .	53
B.2. Resultados del método basado en la relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 1 días, 50 empleados y 10 actividades (1_50_10_s1). . . . .	54
B.3. Resultados del método basado en la relajación lagrangiana, para instancias de 7 días, 50 empleados y 10 actividades (7_50_10). . . . .	54
B.4. Resultados del método basado en la relajación lagrangiana, para instancias de 2 días, 75 empleados y 12 actividades (2_75_12). . . . .	55
B.5. Resultados del método basado en la relajación lagrangiana, para el segundo conjunto de instancias de 7 días, 20 empleados y 5 actividades (7_20_5_s2). . . . .	55

B.6. Resultados del método basado en la relajación lagrangiana, para el segundo conjunto de instancias de 1 días, 50 empleados y 10 actividades (1_50_10_s2). . . . .	56
B.7. Resultados del método basado en la relajación lagrangiana, para las instancias de 7 días, 50 empleados y 7 actividades (7_50_7). . . . .	56
B.8. Resultados del método basado en la relajación lagrangiana, para las instancias de 7 días, 100 empleados y 15 actividades (7_100_15). . . .	57
B.9. Resultados del método basado en asignación de empleados por etapas, para el primer conjunto de instancias de 7 días, 20 empleados y 5 actividades (7_20_5_s1). . . . .	57
B.10. Resultados del método basado en asignación de empleados por etapas, para el primer conjunto de instancias de 1 días, 50 empleados y 10 actividades (1_50_10_s1). . . . .	58
B.11. Resultados del método basado en asignación de empleados por etapas, para instancias de 7 días, 50 empleados y 10 actividades (7_50_10). . . .	58
B.12. Resultados del método basado en asignación de empleados por etapas, para instancias de 2 días, 75 empleados y 12 actividades (2_75_12). . . .	59
B.13. Resultados del método basado en asignación de empleados por etapas, para el segundo conjunto de instancias de 7 días, 20 empleados y 5 actividades (7_20_5_s2). . . . .	59
B.14. Resultados del método basado en asignación de empleados por etapas, para el segundo conjunto de instancias de 1 días, 50 empleados y 10 actividades (1_50_10_s2). . . . .	60
B.15. Resultados del método basado en asignación de empleados por etapas, para las instancias de 7 días, 50 empleados y 7 actividades (7_50_7). . . .	60

B.16.Resultados del método basado en asignación de empleados por etapas, para las instancias de 7 días, 100 empleados y 15 actividades (7_100_15).	61
B.17.Resultados del método basado en asignación de turnos por etapas, para el primer conjunto de instancias de 7 días, 20 empleados y 5 actividades (7_20_5_s1).	61
B.18.Resultados del método basado en asignación de turnos por etapas, para el primer conjunto de instancias de 1 días, 50 empleados y 10 actividades (1_50_10_s1).	62
B.19.Resultados del método basado en asignación de turnos por etapas, para instancias de 7 días, 50 empleados y 10 actividades (7_50_10).	62
B.20.Resultados del método basado en asignación de turnos por etapas, para instancias de 2 días, 75 empleados y 12 actividades (2_75_12).	63
B.21.Resultados del método basado en asignación de turnos por etapas, para el segundo conjunto de instancias de 7 días, 20 empleados y 5 actividades (7_20_5_s2).	63
B.22.Resultados del método basado en asignación de turnos por etapas, para el segundo conjunto de instancias de 1 días, 50 empleados y 10 actividades (1_50_10_s2).	64
B.23.Resultados del método basado en asignación de turnos por etapas, para las instancias de 7 días, 50 empleados y 7 actividades (7_50_7).	64
B.24.Resultados del método basado en asignación de turnos por etapas, para las instancias de 7 días, 100 empleados y 15 actividades (7_100_15).	65
B.25.Resultados del método híbrido basado en relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 7 días, 20 empleados y 5 activida- des (7_20_5_s1).	65

B.26.Resultados del método híbrido basado en relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 1 días, 50 empleados y 10 actividades (1_50_10_s1). . . . .	66
B.27.Resultados del método híbrido basado en relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 7 días, 50 empleados y 10 actividades (7_50_10). . . . .	66
B.28.Resultados del método híbrido basado en relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 2 días, 75 empleados y 12 actividades (2_75_12). . . . .	67
B.29.Resultados del método híbrido basado en relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 7 días, 20 empleados y 5 actividades (7_20_5_s2). . . . .	67
B.30.Resultados del método híbrido basado en relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 1 días, 50 empleados y 10 actividades (1_50_10_s2). . . . .	68
B.31.Resultados del método híbrido basado en relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 7 días, 50 empleados y 7 actividades (7_50_7). . . . .	68
B.32.Resultados del método híbrido basado en relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 7 días, 100 empleados y 15 actividades (7_100_15). . . . .	69

# AGRADECIMIENTOS

---

Agradezco, principalmente, a mis padres, quienes me han apoyado de manera incondicional en todas las decisiones que he tomado, y han estado conmigo siempre, en mis éxitos y fracasos, jamás terminaré de agradecerles todo el amor que me brindan. Así mismo, doy gracias a mis hermanos quienes siempre me han acompañado en todas las etapas de mi vida, mis mejores amigos. Gracias a mi familia por todo el cariño que me han dado siempre.

También doy gracias a mis amigos de “El Árbol”, quienes pasaron a ser mi segunda familia; gracias por las parrandas, los regaños, los enojos y todos los momentos de felicidad, son invaluable para mi. De la misma manera, agradezco a mis amigos y compañeros del PISIS por haber compartido conmigo esta etapa de aprendizaje y por todos los buenos momentos que llegamos a compartir.

Agradezco al Dr. Vincent Boyer, quien dirigió este trabajo. Gracias por su paciencia en todo este proceso y por todas las enseñanzas que me brindó. Así mismo, doy gracias de antemano a mi comité de tesis por revisar y enriquecer este trabajo de tesis.

Agradezco al Prof. Louis Martin-Rousseau, al CIRRELT y a la École Polytechnique de Montréal, por recibirme en su Universidad y por el apoyo económico recibido durante mi estadía por allá. Gracias, particularmente, al Prof. Louis-Martin Rousseau por sus enseñanzas y por los aportes realizados para llevar a cabo esta investigación.

Agradezco a la FIME por haberme recibido en su programa de posgrado y por

todo el apoyo recibido para realizar mi estancia académica y para acudir a congresos. Gracias al PISIS y a su profesorado por todas las enseñanzas brindadas, en especial a la Dra. Angélica Salazar quien aportó ideas para desarrollar este trabajo y a la Dra. Iris Martínez de quien siempre recibí apoyo académico y psicológico durante esta etapa.

Por último, agradezco enormemente al CONACYT, institución que me brindó la beca de manutención que me permitió seguir con mis estudios de posgrado.

# RESUMEN

---

Norberto Alejandro Hernández Leandro.

Candidato para el grado de Maestro en Ciencias  
en Ingeniería de Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio:

## MÉTODOS CONSTRUCTIVOS BASADOS EN RELAJACIÓN LAGRANGIANA PARA EL PROBLEMA DE PLANEACIÓN DE HORARIOS A EMPLEADOS

Número de páginas: 75.

RESUMEN: El problema de planeación de horarios a empleados o también conocido como Shift Scheduling Problem, es un problema de planeación, el cual consiste en realizar la asignación de secuencias de actividades a cada turno de cada empleado, con el objetivo de minimizar los costos de incumplir y sobrecumplir las demandas que tiene cada actividad. Los empleados son capacitados para realizar un subconjunto de las actividades y cada actividad tiene un tiempo mínimo y máximo en su duración, cuando es asignada. Esta última consideración es relevante cuando se toman en cuenta actividades que requieren un gran esfuerzo físico.

Este trabajo propone hacer uso de las gramáticas libres de contexto y de la relajación lagrangiana en un ámbito heurístico para solucionar, de manera eficiente, este problema. Se presentan cuatro métodos heurísticos: primero, una metodología en la que se obtiene una solución factible a partir de la relajación lagrangiana; después, dos métodos en los que se realizan asignaciones por etapas, usando la relajación lagrangiana para fijar variables; por último, se propone un método híbrido donde las columnas generadas mediante la relajación lagrangiana, se integran en una formulación de *Set-Covering*.

La experimentación computacional, realizada con instancias de la literatura, muestra la eficiencia del método híbrido en comparación con los otros enfoques propuestos en esta tesis y en la literatura. El método híbrido alcanza las mejores cotas reportadas en 60 % de las instancias y encuentra mejores cotas para el 32.5 % de las instancias.

**ABSTRACT:** In this thesis, different Lagrangian relaxation based heuristics for the multi-activity shift scheduling problem (SSP) are studied. The SSP consists in assigning a sequence of activities to a set of employees, in order to satisfy a specific demand over a planning horizon. Furthermore, this study is focused in the variant of the problem where the employees have different skills, preferences, and availabilities.

To solve this problem we present four heuristics based on Lagrangian relaxations where the set of feasible shifts for an employee is formulated through the use of context free grammars. In the literature, grammar based models have been used to solve exactly the SSP, however, the results show that the approach starts to struggle on large instances. The motivation of this work is to propose an efficient heuristic able to provide optimal or near-optimal solutions for the SSP in a shorter computation time than the best exact approach reported in the literature.

The first proposed heuristic tries to build a feasible solution directly from the Lagrangian relaxation of the problem. The second and the third heuristics are



iterative approaches where, at each iteration, the Lagrangian relaxation is solved and a subset of shifts is fixed. The fourth approach is a hybrid method where the set of shifts explored by the Lagrangian relaxation are integrated into a set covering formulation.

Computational experiments are carried out on a large set of instances taken from the literature. The results are compared to the best known solution reported. These experiments show the efficiency of the hybrid approach, which is able to find the best known solutions for 60 % of the instances tested and it also reports better solutions, for 32.5 % of the instances.



Firma del asesor: \_\_\_\_\_

Dr. Vincent André Lionel Boyer

## CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN

---

En la actualidad, para muchas empresas, determinar la asignación de horarios de sus empleados es una tarea difícil. El planificar el horario y las actividades que cada empleado debe seguir, define si las demandas de los clientes serán satisfechas o no. La insatisfacción excesiva de demanda impacta directamente en las utilidades de la empresa y, también, puede causar la pérdida de clientes. Por ello, la importancia de diseñar una herramienta eficiente para la asignación de los horarios que garantice un buen servicio al cliente y el bienestar de los empleados.

En este trabajo se propone una heurística para el problema de asignación de horarios a empleados, el cual consiste en fijar una secuencia de actividades para cada empleado. En seguida, se definirá el problema de manera más detallada.

## 1.1 PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE HORARIOS A EMPLEADOS

El problema de asignación de horarios a empleados consiste en fijar los turnos de un conjunto de empleados. Dichos turnos, están formados por una secuencia de actividades, en la cual, se pueden incluir descansos o periodos de comida. Así mismo, cada secuencia está restringida a las regulaciones de cada empresa, así como, al conjunto de actividades que cada empleado está capacitado a hacer.

Las actividades representan las operaciones que realiza una compañía cotidiana-

namamente, cada una de ellas tiene una demanda determinada que varía en el horizonte de planeación. El incumplimiento de esta demanda refleja la calidad del servicio que proporciona dicha empresa.

En esta tesis se toma un horizonte de planeación discretizado. Por un lado, porque carece de sentido que un empleado sólo trabaje dos minutos en una actividad para después hacer otra; por el otro, las transiciones entre actividades no son momentaneas, es por ello que resulta irrelevante el tomar en cuenta pequeñas fracciones de tiempo como referencia para realizar el cambio.

Por ejemplo, suponga que sólo se tiene la actividad  $a$  y su demanda en cada periodo del horizonte de planeación está representada en la Figura 1.1.

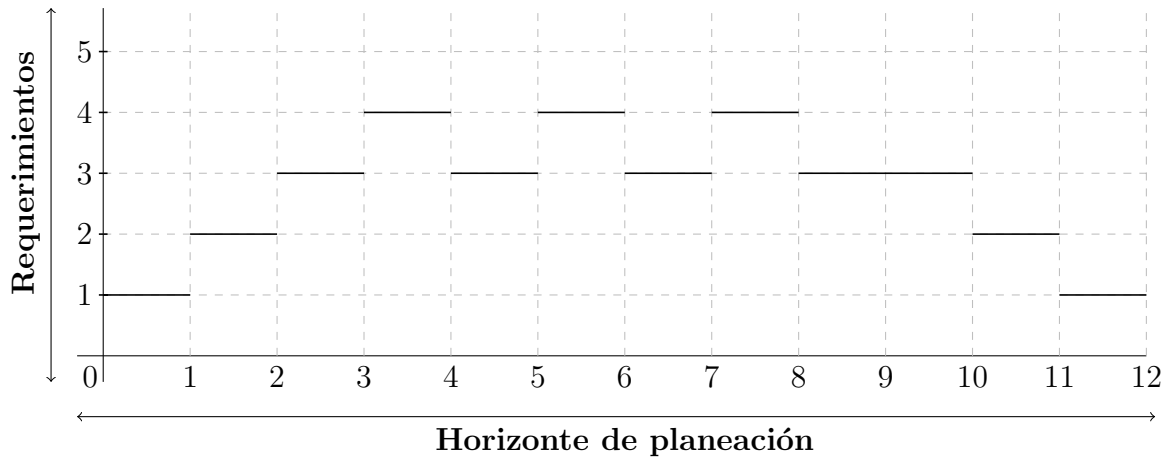


Figura 1.1: Demandas de la actividad  $a$

Si se realiza la asignación de la actividad  $a$  tal y como se presenta en la Figura 1.2, entonces los requerimientos de la actividad  $a$  quedan como se presentan en la Figura 1.3. En los periodos cero, uno, ocho, diez y once, se tiene que la demanda de la actividad  $a$  es cumplida en su totalidad. Para los periodos restantes, resulta que las demandas de la actividad  $a$  son cumplidas de manera parcial; es decir, se requiere asignar la actividad a un mayor número de empleados.

—

En esta tesis se abordará el problema de planeación de horarios a empleados

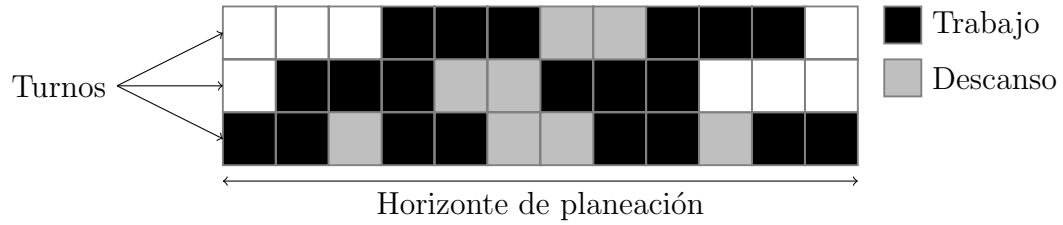


Figura 1.2: Ejemplo de asignación de la actividad  $a$ .

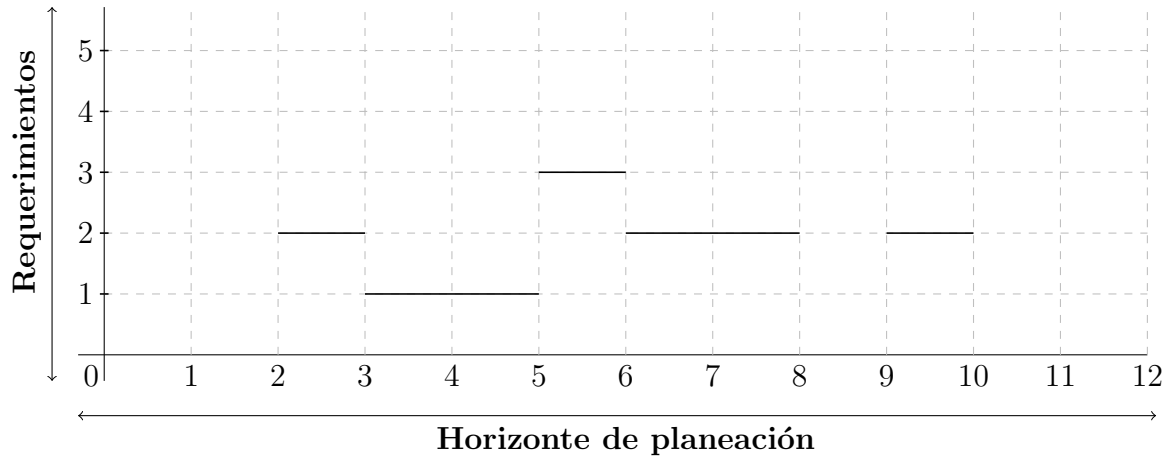


Figura 1.3: Demandas de la actividad  $a$  después de la asignación

con múltiples actividades. Este problema es conocido, en la literatura, como *Multi-Activity Shift Scheduling Problem* (SSP, por sus siglas en ingles). En el SSP se toman en cuenta las siguientes consideraciones:

- El horizonte de planeación discretizado en periodos fijos.
- El periodo de inicio y terminación de cada turno para cada empleado son fijos.
- Cada turno tiene periodos de descanso y/o comida también fijos.
- Cada empleado sólo puede realizar un subconjunto de todas las actividades.
- Cada actividad debe de ser realizada entre un mínimo y un máximo de periodos consecutivos, si es asignada a un empleado.
- Cada actividad tiene una demanda dada para cada periodo en el horizonte de planeación; i.e. la cantidad de empleados que debe realizar esta actividad para

cumplir con sus requerimientos.

- El incumplimiento y el sobrecumplimiento de cada actividad tienen costos fijos.
- El costo de incumplimiento es mayor al correspondiente del sobrecumplimiento.
- Las transiciones entre actividades diferentes en un turno generan costo.

El objetivo es realizar la asignación de los turnos de cada empleado de tal forma que la suma de los costos de incumplimiento y sobrecumplimiento sea la mínima, con el fin de cumplir las necesidades de los clientes de la mejor manera posible y minimizar las transiciones en los turnos, para la comodidad del empleado.

## 1.2 MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Para muchas empresas el determinar la asignación de turnos a sus empleados es una tarea difícil. Un ejemplo de ello, son aquellos negocios, como los restaurantes de comida rápida, en los que la mayor parte de los empleados son estudiantes. En este caso, la asignación de horarios debe considerar los horarios escolares, para que estos no entren en conflicto con el horario laboral, así como las horas en las que se tiene mayor clientela.

Otro ejemplo, son las tiendas de autoservicio, en las que se tienen un conjunto de actividades a realizar, como el desempaqueado y acomodo de productos, la atención de una caja o área en la que se tiene que proporcionar algún producto al cliente, la recolección de productos fuera de lugar y la remoción caducados. Dichas tiendas tienen que asegurar que todas las actividades se realicen de manera eficiente para evitar largas filas en horas pico, el desorden de sus artículos y la existencia de productos caducados.

Por otro lado, si un negocio tiene un conjunto de actividades que necesitan un mayor esfuerzo físico, se desea que los empleados rolen entre actividades, con el

objetivo de balancear el trabajo que hace en cada turno. Además, se deben considerar las capacidades que tiene cada trabajador para realizar alguna actividad.

Estas situaciones dificultan la obtención de cada combinación de actividades para un turno factible, resultando en un problema de planeación complejo. Por esta razón, es importante desarrollar métodos para resolver este problema de manera eficiente.

### 1.3 OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

En esta investigación, el objetivo principal es proponer un método heurístico eficiente para la resolución del problema de planeación de horarios a empleados, que permita dar solución a un conjunto de instancias de la literatura de manera eficiente. Así mismo, se planea comparar los mejores resultados reportados en la literatura con los de la metodología propuesta.

### 1.4 PLAN DE TRABAJO

En el capítulo 2 se presenta una revisión de la literatura que describe los principales trabajos que abordan el problema de asignación de horarios a empleado y los métodos basados en relajación lagrangiana para resolver el *Set-Covering Problem*.

En el capítulo 3 se presentan definiciones importantes sobre las gramáticas libres de contexto, para la comprensión de los métodos de solución, así como el modelo matemático basado en una formulación de *Set-Covering*.

El capítulo 4 y 5 se describen tres métodos heurísticos basados en los conceptos de gramáticas libres de contexto y de relajación lagrangiana, y se presentan los resultados computacionales obtenidos con cada una de ellas.

En el capítulo 6, se muestra un método híbrido basado en relajación lagrangiana, así como la experimentación realizada con dicho método.

---

Por último, en los capítulos 7 y 8, se presentan las conclusiones de esta investigación y el trabajo a futuro, respectivamente.

## CAPÍTULO 2

# REVISIÓN DE LITERATURA

---

La planificación de las actividades de la fuerza laboral es un aspecto muy importante para muchas organizaciones. Sin embargo, resulta ser una tarea muy compleja debido a la dimensión del problema, así como, a las restricciones derivadas de las regulaciones y los objetivos de cada empresa. Es por ello que las diferentes variantes de la administración de personal han recibido mucha atención en la literatura, así lo muestra Ernst et al. (2004a) y Ernst et al. (2004b), en los que se presentan más de 700 referencias al respecto.

En las siguientes secciones se presentan las principales formulaciones y métodos de resolución existentes en la literatura para solucionar el problema de planeación de horarios a empleados con múltiples actividades, y una revisión de los métodos heurísticos basados en relajación lagrangiana para el *Set-Covering Problem*.

## 2.1 PROBLEMA DE PLANEACIÓN DE HORARIOS A EMPLEADOS CON MÚLTIPLES ACTIVIDADES

Ritzman et al. (1976) presentan un problema de planeación de turnos de trabajo con diferentes operaciones a realizar, donde los empleados tienen habilidades y se clasifican en dos tipos: de medio tiempo y de tiempo completo. Los autores modelan el problema con variables binarias indicando si una operación es realizada en un periodo de un determinado turno. Sin embargo, la complejidad y el tamaño del



problema hace que la resolución de dicho modelo sea impráctica. Por tanto, sugieren un enfoque heurístico para solucionar el problema.

Loucks and Jacobs (1991) abordan un problema de planeación de horarios para una semana, la cual está dividida en periodos de una hora. Para cada periodo, se tiene la cantidad mínima de personal requerida para realizar un conjunto de actividades. Además, los empleados tienen diferentes habilidades y periodos de disponibilidad. Cada empleado tiene un número total de horas y días en los que puede ser asignado. El posicionamiento de las pausas y las restricciones con respecto al número de horas que separan dos turnos consecutivos, no son tomados en cuenta.

Böehmer and Grüener (2003) realizan una reformulación del modelo presentado por Loucks and Jacobs (1991) y muestran dos contraejemplos para demostrar que el modelo original no es el correspondiente a la descripción del problema. Además, brindan argumentos para afirmar que su formulación describe, exactamente, el problema definido por Loucks and Jacobs (1991). Sin embargo, no se presentan resultados experimentales.

Omari (2002), Vatri (2001) y Bouchard (2004) estudian diversos aspectos del problema de asignación de turnos. Omari (2002) estudia el problema de asignación de actividades en turnos predeterminados; Vatri (2001) considera de manera simultanea la generación de turnos y la asignación de las actividades, y Bouchard (2004) estudia, adicionalmente, la colocación de los descansos. En los dos primeros, se presentan métodos heurísticos; mientras que en el tercero, se plantea un método de generación de columnas.

Demasse et al. (2006) presentan un método de generación de columnas basado en programación por restricciones y autómatas, y utilizan el algoritmo del camino más corto para filtrar las columnas y dar solución a los problemas de planificación de turnos con múltiples actividades.

Lequy et al. (2009) analizan una variante del problema introducido por Omari (2002), donde los turnos y descansos de cada uno de los empleados son presta-

blecidos. El objetivo es asignar las actividades a cada turno, tomando en cuenta las habilidades que tienen los empleados, de tal forma que se minimicen los costos del incumplimiento o sobrecumplimiento de los requerimientos de cada actividad, así como los costos de las transiciones entre los trabajos distintos de cada turno.

Lequy et al. (2009) proponen tres modelos matemáticos. El primero, es un modelo de multifujo con restricciones adicionales. El segunda, es una reformulación del primer modelo, en el que se reduce el número de restricciones y variables. El tercero, es un modelo de generación de columnas basado en el de multifujo. Lequy et al. (2009) desarrollan un método de ramificación y acotamiento truncado, y una heurística que fija a cero todas las variables tales que su costo reducido en la relajación lineal es positivo, con el objetivo de acelerar la búsqueda de una solución entera. Además, se reportan los resultados con los primeros dos modelos y se muestra el buen desempeño de las heurísticas propuestas.

Quimper and Rousseau (2010) hacen uso de lenguajes regulares y gramáticas libres de contexto para modelar las restricciones de cada turno de cada empleado. A partir de aquí, diseña dos operadores para la búsqueda por grandes vecindarios (*Large Neighbourhood Search*), para resolver el problema de planeación de horarios a empleados con múltiples actividades.

Côté et al. (2011a) realizan un estudio de la modelación de las restricciones para las secuencias de actividades válidas para el problema de planeación de horarios a empleados, y plantea modelarlas mediante autómatas y gramáticas libres de contexto. Por último, presentan los resultados obtenidos con ambas propuestas.

Côté et al. (2011b) realizan una nueva formulación implícita para el problema de planeación de turnos, usando gramáticas libres de contexto para modelar las restricciones que describen los turnos válidos del problema. De aquí, se genera un modelo de programación entera, donde la relajación lineal es equivalente a un modelo de cobertura de conjuntos. Exponen una serie de resultados experimentales, que demuestran el buen desempeño del nuevo modelo propuesto.

Dahmen and Rekik (2012) diseñan un método híbrido para el SSP con base en una búsqueda tabú, en la que hacen uso de un *Branch and Bound* para las fases de mejora, de intensificación y de diversificación.

Côté et al. (2013) proponen un algoritmo de branch and price para el problema de planeación de turnos con múltiples actividades. Donde los subproblemas de la generación de columnas son formulados utilizando gramáticas libres de contexto y resueltos mediante programación dinámica. En este caso, las gramáticas libres de contexto permiten modelar de manera sencilla las restricciones relacionadas con los turnos, permitiendo que el algoritmo propuesto resuelva problemas de mayor tamaño.

Se plantea, además, dos variantes del problema. La primera, toma en cuenta turnos fijos y, en la segunda, los turnos tienen que ser diseñados. Côté et al. (2013) muestran la experimentación correspondiente y compara su algoritmo con los métodos propuestos por Demassez et al. (2006) y Lequy et al. (2009).

Boyer et al. (2014) presenta un algoritmo de branch and price similar al que presentan Côté et al. (2013), para resolver el problema de planeación de turnos con múltiples actividades y múltiples tareas. De igual manera, se presentan las variantes en la que se tienen turnos fijos y en la que los turnos deben ser diseñados. Así mismo, se exponen los resultados obtenidos para un conjunto de instancias basadas en casos reales.

Como se muestra en Quimper and Rousseau (2010), Côté et al. (2011a), Côté et al. (2011b), Côté et al. (2013) y Boyer et al. (2014), los algoritmos basados en gramáticas libres de contexto, resultan ser muy útiles al resolver el problema de asignación de turnos a empleados.

El modelar los turnos de cada empleado con una gramática, permite considerar las restricciones que determinan todas las secuencias válidas de actividades para cada turno de manera sencilla. De tal forma que las palabras generadas por dicha gramática, conforman el conjunto de todas las posibles asignaciones de actividades para cada ciclo de trabajo. Por esta razón, se considerará utilizar esta herramienta

en el diseño de una metodología de solución.

Esta tesis se centrará, principalmente, en los trabajos presentados por Lequy et al. (2009) y Côté et al. (2013). En los que se plantea un método híbrido y uno exacto, respectivamente, para el problema de asignación de horarios a empleados. Estas metodologías muestran tener un buen rendimiento; sin embargo, para problemas grandes, en los que se cuenta con más de 50 empleados y 15 actividades, los métodos comienzan a ser muy tardados y, por ende, imprácticos.

Es por ello, la necesidad de diseñar un método heurístico eficiente que permita resolver un conjunto de instancias más grande en un tiempo computacional corto.

## 2.2 MÉTODOS HEURÍSTICOS BASADOS EN RELAJACIÓN LAGRANGIANA PARA EL PROBLEMA DE CUBRIMIENTO (SET-COVERING)

La relajación lagrangiana ha sido ampliamente utilizada para la resolución de diversos problemas de optimización; como por ejemplo, en problemas de localización (Beasley (1993) y Klinecicz and Luss (1986)), de asignación generalizada (Lorena and M.G. (1996) y Jeet and E. (2007)), de ruteo de vehículos (Imai et al. (2007)) y de *scheduling* (Luh and Hoitom (1993)), por mencionar algunos. Incluso, de manera más general, es posible encontrar algunas guías sobre el uso de esta técnica para la resolución de problemas de programación entera: Guignard (2003), Fisher (1985), Fisher (1981) y Geoffrion (1974).

Por esta razón, enfocaremos la atención en los métodos basados en relajación lagrangiana para el problema de cubrimiento de conjuntos. A continuación, se muestran los trabajos de mayor relevancia.

Balas and Ho (1980) diseña un *branch and bound*, en el que hace uso de los costos reducidos obtenidos por el método subgradiente, para fijar variables y generar

soluciones factibles para el problema.

Beasley (1990) propone un método heurístico, en el que en cada iteración del método subgradiente calcula una solución factible. Para ello, genera una solución parcial  $S$ , proveniente de añadir a ésta, todas las columnas con costo reducido negativo. Posteriormente, si quedan nodos sin cubrir se añade el que tiene menor costo, hasta obtener una solución factible. Además, se remueven todos los nodos de mayor costo, de tal forma que no se pierda la factibilidad.

Balas and Carrera (1996) realiza un método heurístico en el que acopla el método subgradiente a un esquema de *branch and bound*, que a diferencia del método presentado por Balas and Ho (1980), se realiza una selección previa de las columnas que se van a relajar. Posteriormente, se ramifica sobre aquellas columnas con costo reducido igual a cero pero que el multiplicador lagrangiano asociado sea estrictamente positivo.

Ceria et al. (1998), Crapara et al. (1999) y Yagiura et al. (2006) hacen uso de los costos reducidos de la relajación lagrangiana para fijar a cero aquellas variables con costo reducido mayor a un umbral y así reducir el tamaño del problema, generando soluciones factibles a partir de las variables fijas y aplicando una heurística greedy.

Umetani and Yagiura (2007) resuelven el problema mediante una variante del método de generación de columnas llamado *Sifting Method* (Bixby et al. (1992)), el cual utiliza la información de los costos reducidos de la relajación lagrangiana, para generar un subproblema que sólo tome en cuenta aquellas filas que cumplan con ciertas condiciones. Posteriormente, fijan las columnas haciendo uso de los costos reducidos del subproblema y usan una heurística *greedy* para generar soluciones factibles.

Caserta (2007) diseña una búsqueda tabú, utilizando un algoritmo basado en relajación lagrangiana para la fase de intensificación. En dicha metodología, después de la búsqueda tabú, se calculan los costos reducidos con el objetivo de generar un subproblema de manera parecida a Umetani and Yagiura (2007). Después, se fijan

variables en conjunto con una heurística greedy para obtener soluciones factibles.

En los artículos antes mencionados se demuestra que los métodos basados en relajación lagrangiana son eficientes para la resolución del problema de cubrimiento de conjuntos. Es por ello, que en este trabajo se trabajará con un modelo de *set-covering*, como los presentados por Côté et al. (2013) y Boyer et al. (2014), para tratar el problema de planeación de horarios a empleados. Así mismo, se plantea trabajar con métodos basados en relajación lagrangiana para la construcción de soluciones de buena calidad.

## CAPÍTULO 3

# MARCO TEÓRICO

---

En este capítulo se presentan algunas definiciones que, posteriormente, serán utilizadas para formular un modelo de set-covering para el problema de planeación de turnos a empleados con múltiples actividades. Dicho modelo será de gran utilidad para el diseño de los métodos de solución que se presentarán en los siguientes capítulos. Para más detalles sobre las gramáticas libres de contexto, ver Hopcroft et al. (2001) y Sipser (2006).

### 3.1 GRAMÁTICAS LIBRES DE CONTEXTO

**Definición 3.1** Una gramática libre de contexto  $G$  se define por la tupla  $(\Sigma, N, P, S)$  donde:

- $\Sigma$  es un alfabeto de símbolos llamados terminales;
- $N$  es un conjunto de símbolos llamados no terminales;
- $P$  es un conjunto de reglas de producción de la forma  $X \rightarrow \alpha$ ; i.e.  $X$  produce  $\alpha$ .  
Donde  $X \in N$  y  $\alpha$  es una secuencia de símbolos terminales y/o no terminales;
- $S$  es el símbolo no terminal inicial.

**Definición 3.2** Una secuencia de símbolos terminales es llamada palabra, si esta puede ser generada por las reglas de producción de la gramática  $G$ , comenzando por el símbolo no terminal  $S$ .

**Definición 3.3** *Se le denomina lenguaje, al conjunto de todas las palabras generadas por  $G$ .*

**Ejemplo 3.4** *Si se considera la gramática  $G(\Sigma, N, P, S)$  donde:*

- $\Sigma = \{a, b\};$
- $N = \{A, B\};$
- *y  $P$  esta conformado por:*
  - $S \rightarrow AB, A \rightarrow AA|a$  y  $B \rightarrow BB|b.$

*se obtiene el lenguaje  $\{a^n b^m | n, m > 0\}$ .*

Si se quiere generar las palabras que tienen una longitud de tres letras, con la gramática presentada en el Ejemplo 3.4, se tendrían que aplicar las reglas de producción mostradas en la columna P de las Tablas 3.1, donde en la columna SC se presentan las secuencias generadas.

P	SC	P	SC
-	$S$	-	$S$
$S \rightarrow AB$	$AB$	$S \rightarrow AB$	$AB$
$A \rightarrow AA$	$AAB$	$B \rightarrow BB$	$ABB$
$A \rightarrow a$	$aAB$	$B \rightarrow b$	$ABb$
$A \rightarrow a$	$aaB$	$B \rightarrow b$	$Abb$
$B \rightarrow b$	$aab$	$A \rightarrow a$	$abb$
(a)		(b)	

Tabla 3.1: Derivaciones de las palabras aab (a) y abb (b)

Una manera común de ilustrar la derivación de una palabra proveniente de una gramática es usar un árbol, llamado árbol de derivación, donde el nodo raíz es el



nodo no terminal inicial  $S$ , los nodos interiores representan símbolos no terminales, y las hojas son letras del alfabeto.

En la Figura 3.1, se exponen los árboles de derivación de las palabras de tres letras generadas por la gramática del Ejemplo 3.4.

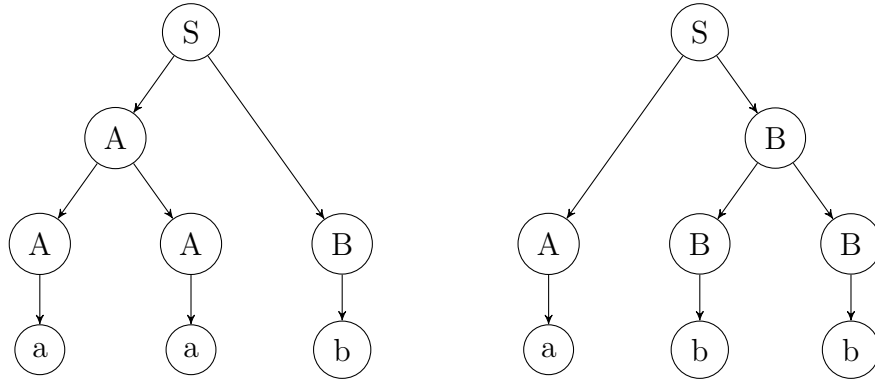


Figura 3.1: Árboles de derivación de las palabras de tres letras generadas por la gramática  $G$  del Ejemplo 3.4

Un árbol de derivación de una palabra  $\omega$  de longitud  $n$ , cumple las siguientes propiedades:

- Un nodo interior y sus hijos representan una producción en  $P$ .
- Una hoja está asociada con una posición  $i \in \{1, \dots, n\}$  en  $\omega$  y representa una letra de  $\Sigma$ .
- Cualquier nodo interior es raíz de un árbol que produce una subsecuencia de  $\omega$ , iniciando en una posición determinada  $i \in \{1, \dots, n\}$  con longitud  $l \in \{1, \dots, n - i + 1\}$ .

Haciendo uso de estas observaciones, se puede construir un grafo que involucre a todos los árboles de derivación asociados a las palabras de una longitud dada.

Por otro lado, también es posible determinar si una palabra es generada por una gramática dada. Para ello, se hace uso del algoritmo CYK (Cocke and Schwartz

(1970), Younger (1967) y Kasami (1965)). El cual opera sólo con gramáticas dadas en forma normal de Chomsky. Sin embargo, cualquier gramática libre de contexto puede ser transformada a forma normal de Chomsky (ver: Sipser (2006)).

## 3.2 GRAFO ACÍCLICO DIRIGIDO $\Gamma$

En esta sección, se define la noción de grafo acíclico dirigido (GAD)  $\Gamma$  (Quimper and Walsh (2007)), que es una extension de las estructuras propuestas por Sellman (2006) y Quimper and Walsh (2006).

Un GAD  $\Gamma$ , es un grafo que encapsula a todos los árboles de derivación asociados a las palabras de una longitud dada  $n$  generadas por la gramática  $G(\Sigma, N, P, S)$ . El GAD  $\Gamma$  tiene una estructura y/o con dos tipos de nodos: nodos  $O$  (nodos-o) que representan símbolos no terminales de  $N$  y letras de  $\Sigma$ , y nodos  $A$  (nodos-y) que representan producciones de  $P$ . Cada nodo, es caracterizado por su símbolo (terminal, no terminal o producción), y la posición y longitud de la subsecuencia que genera.

Se define  $O_{il}^\pi$  al nodo asociado con el simbolo no terminal o la letra  $\pi$ , y que genera la subsecuencia de longitud  $l$  en la posición  $i$ . Nótese que si  $\pi \in \Sigma$ , el nodo es una hoja y  $l$  es igual a uno. Además, el nodo raíz es denotado por  $O_{1n}^S$ .

De manera similar,  $A_{il}^{\Pi,t}$  es el  $t$ -ésimo nodo que representa la producción  $\Pi \in P$  que genera una secuencia de longitud  $l$  a partir de la posición  $i$ . Existen tantas  $A_{il}^{\Pi,t}$  como formas de usar  $\Pi$  para generar una secuencia de tamaño  $l$  en la posición  $i$ . A este conjunto se le denominará  $A(\Pi, i, l)$ .

El GAD  $\Gamma$  está construido de tal forma que el camino entre un nodo y otro, alterna entre nodos  $O$  y nodos  $A$ . De una forma más precisa, el GAD  $\Gamma$  tiene las siguientes propiedades:

- Los hijos de un nodo  $O_{il}^\pi$ , denotados por  $ch(O_{il}^\pi)$ , son todos los nodos  $A_{il}^{\Pi,t}$  tales que  $\Pi : \pi \rightarrow \beta$ ,  $\beta \in N \times N \cup \Sigma$  y  $t \in A(\Pi, i, l)$ .

- Cada nodo  $O_{i1}^\pi$ , donde  $\pi$  es un símbolo no terminal, tiene solamente un hijo; es decir,  $ch(O_{i1}^\pi) = A_{i1}^{\Pi,1}$  tal que  $\Pi : \pi \rightarrow a$ , donde  $a \in \Sigma$ .
- Los padres de un nodo  $O_{il}^\pi$ , donde  $\pi \neq S$  es un símbolo no terminal, denotados por  $par(O_{il}^\pi)$ , son nodos  $A_{j,m}^{\Pi,t}$  tales que  $\Pi : X \rightarrow \pi Z$  o  $\Pi : X \rightarrow Y\pi$ , donde  $j \leq i$  y  $m \geq l$ .
- Cada nodo  $O_{i1}^\pi$ , donde  $\pi$  es una letra, tiene solo un padre; es decir,  $par(O_{i1}^\pi) = A_{i1}^{\Pi,1}$  tal que  $\Pi : X \rightarrow \pi$ .
- Cada nodo  $A_{il}^{\Pi,t}$ , con  $l > 1$ , tal que  $\Pi : X \rightarrow YZ$  tiene exactamente dos hijos:  $O_{ik}^Y$  y  $O_{i+k,i+l-k-1}^Z$ , donde  $k \leq i + l - 2$ .
- Cada nodo  $A_{i1}^{\Pi,1}$  tal que  $\Pi : X \rightarrow a$ , donde  $A \in \Sigma$ , tiene solo un hijo:  $O_{i1}^a$ .
- Un nodo  $A_{il}^{Pi,t}$  tiene un solo padre,  $O_{il}^\pi$ , si  $l = 1$  y  $\Pi : \pi \rightarrow a$ ,  $a \in \Sigma$ .

En la Figura 3.2 se muestra el GAD  $\Gamma$  correspondiente a la gramática del Ejemplo 3.4 para palabras de tres letras. En este grafo es fácil verificar las propiedades anteriores.

Para obtener cualquier árbol de derivación a partir de un GAD  $\Gamma$ , se comienza del nodo  $O_{1n}^S$ . Posteriormente, se visitan los nodos de tal forma que para los nodos  $O_{il}^\pi$  se elige solo a uno de sus hijos, mientras que para los nodos  $A_{il}^{\Pi,t}$  se toman a todos sus hijos para ser visitados. De manera contraria, a partir de una palabra  $\omega$ , se puede atravesar  $\Gamma$  en reversa para obtener el árbol de derivación de  $\omega$ .

### 3.3 REPRESENTACIÓN DE TURNOS CON GRAMÁTICAS LIBRES DE CONTEXTO

Los turnos de cada empleado son definidos por una secuencia de símbolos que representan las actividades que se realizarán, y cada secuencia está restringida por las regulaciones de cada empresa y por las habilidades de cada empleado.

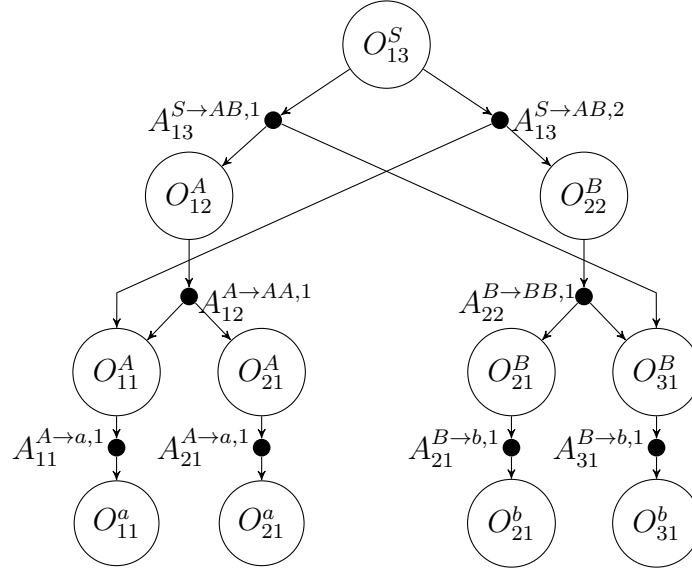


Figura 3.2: GAD  $\Gamma$  de la gramática del Ejemplo 3.4 para palabras de tres letras

Consecuentemente, cada turno puede ser modelado con una gramática libre de contexto. Más aún, considerando que cada horario es una secuencia de una longitud determinada; entonces, todos los posibles turnos pueden ser representados por un GAD  $\Gamma$ . Reduciendo nuestro problema, a elegir las secuencias que mejor cubran las demandas de cada actividad.

Por ejemplo, si se tiene que la gramática del Ejemplo 3.4 representa los turnos factibles del empleado  $e$  con duración de tres periodos. Donde los símbolos  $a$  y  $b$  representan las actividades que el empleado  $e$  puede realizar; entonces, el conjunto de todos los turnos factibles queda representado por el GAD  $\Gamma$  presentado en la Figura 3.2.

Para la contrucción del GAD  $\Gamma$  correspondiente a cada turno de cada empleado, se utilizará, en esta tesis, la gramática  $G^{e,p}$ , presentada por Côté et al. (2013) para este problema:

$$G^{e,p} = (\Sigma = (a_j, \forall j \in J_e), N = (S, \{A_j, A_j^n, A_j'\} \forall j \in J_e), P, S),$$

donde  $J_e$  es el conjunto de actividades que es capaz de hacer el empleado  $e$  y  $a_j$  es la actividad  $j$ . Para definir  $P$  se utilizan las siguientes notaciones:

- $\rightarrow_{[min, max]}$  restringe a que las subsecuencias generadas tengan una longitud entre un mínimo y máximo de periodos;
- $l_{ep}$  es la longitud del turno  $p$  del empleado  $e$ ;
- $max_j$  y  $min_j$  son las duraciones máximas y mínimas de la actividad  $j$ , respectivamente.

Entonces,  $P$  queda definida como sigue:  $\forall j \in J_e$

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow_{[l_{ep}, l_{ep}]} A_j A_j^n \\
S &\rightarrow_{[l_{ep}, l_{ep}]} A_j \quad \text{si } l_{ep} \leq max_j \\
A_j &\rightarrow_{[min_j, max_j]} A'_j \\
A_j^n &\rightarrow A_{j'} A_{j'}^n | A_{j'} \quad \forall j' \in J_e \setminus \{j\} \\
A'_j &\rightarrow A'_j a_j | a_j.
\end{aligned}$$

### 3.4 MODELO DE *set-covering* PARA EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE TURNOS A EMPLEADOS CON MÚLTIPLES ACTIVIDADES

En este problema se considera el conjunto  $E$  de todos los empleados disponibles; el conjunto  $\Omega^e$  de todos los turnos factibles del empleado  $e$ ; el conjunto  $A$  de todas las actividades a realizar; el conjunto  $I$  de periodos del horizonte de planeación, y  $b_{ia}$  la demanda de la actividad  $a$  en el periodo  $i$ . Así mismo, se toma en cuenta el parámetro  $\delta_{ias}^e$ , que vale 1 si la actividad  $a \in A$  está asignada en el periodo  $i$  al turno  $s \in \Omega^e$  para el empleado  $e \in E$ , y 0 si no.

A partir de aquí, se formula el siguiente modelo de *set-covering* (**MSC**) derivado del que se presenta en el trabajo de Boyer et al. (2014).

$$\text{Min } z = \sum_{e \in E} \sum_{s \in \Omega^e} c_s^e x_s^e + \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} (c_{ia}^u u_{ia} + c_{ia}^o o_{ia}) \quad (3.1)$$

sujeto a

$$\sum_{e \in E} \sum_{s \in \Omega^e} \delta_{ias}^e x_s^e + u_{ia} - o_{ia} = b_{ia} \quad \forall i \in I, a \in A \quad (3.2)$$

$$\sum_{s \in \Omega^e} x_s^e = 1 \quad \forall e \in E \quad (3.3)$$

$$x_s^e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E, s \in \Omega^e \quad (3.4)$$

$$u_{ia} \geq 0 \quad \forall i \in I, a \in A \quad (3.5)$$

$$o_{ia} \geq 0 \quad \forall i \in I, a \in A \quad (3.6)$$

Donde:

- $x_s^e = 1$  si el turno  $s \in \Omega^e$  es asignado al empleado  $e \in E$ , y  $x_s^e = 0$  de otra forma.
- $u_{ia}$  representa la cantidad de asignaciones necesarias para cumplir a totalidad la demanda de la actividad  $a \in A$  en el periodo  $i \in I$ .
- $o_{ia}$  representa la cantidad de asignaciones que se realizan después de haber cubierto la demanda de la actividad  $a \in A$  en el periodo  $i \in I$ .

La función objetivo (3.1) esta compuesta por los costos de asignar un turno ( $c_s^e$ ) y por los costos de incumplir ( $c_{ia}^u$ ) o sobrecumplir ( $c_{ia}^o$ ) la demanda de una actividad en un determinado periodo. La restricción (3.2) representa la satisfacción de demanda de cada actividad. Mientras que la restricción (3.3), asegura que sólo una secuencia es asignada a cada empleado.

Como ya se mencionó, los turnos factibles pueden ser modelados con una gramática libre de contexto y representados con un GAD  $\Gamma$ . En este trabajo se tomará la idea de Côté et al. (2013) de representar el conjunto  $\Omega^e$  con el GAD  $\Gamma$  correspondiente al empleado  $e$ .

Así mismo, se tomará el método de programación dinámica propuesto por Côté et al. (2013) para la elección de cada turno. En la Sección 4.2, se detallará más al respecto.

## CAPÍTULO 4

# MÉTODO CONSTRUCTIVO BASADO EN RELAJACIÓN LAGRANGIANA

---

En este capítulo, se presenta un método constructivo basado en la relajación lagrangiana para la asignación de horarios a empleados, al que llamaremos MRL (Método constructivo basado en Relajación Lagrangiana). Así mismo, se comparará el rendimiento de este método con los resultados encontrados por el *Branch and Price* presentado por Côté et al. (2013), al cual nos referiremos como BP.

## 4.1 RELAJACIÓN LAGRANGIANA DEL MODELO DE ASIGANCIÓN DE HORARIOS A EMPLEADOS

Tomando en cuenta el modelo (MSC), se tiene que el conjunto de restricciones (3.2) complica la resolución del problema de manera exacta. Es por ello, que se plantea la idea de utilizar la relajación lagrangiana del modelo para la construcción de una solución.

A continuación, se presenta la relajación lagrangiana del modelo (MSC):

$$\begin{aligned} \text{(RMSC) Min } z = & \sum_{e \in E} \sum_{s \in \Omega^e} c_s^e x_s^e + \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} (c_{ia}^u u_{ia} + c_{ia}^o o_{ia}) \\ & + \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} \lambda_{ia} \left( \sum_{e \in E} \sum_{s \in \Omega^e} \delta_{ias}^e x_s^e + u_{ia} - o_{ia} - b_{ia} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

sujeto a

$$\sum_{s \in \Omega^e} x_s^e = 1 \quad \forall e \in E \quad (4.2)$$

$$x_s^e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E, s \in \Omega^e \quad (4.3)$$

$$u_{ia} \geq 0 \quad \forall i \in I, a \in A \quad (4.4)$$

$$o_{ia} \geq 0 \quad \forall i \in I, a \in A \quad (4.5)$$

$$\lambda_{ia} \in \mathbb{R} \quad (4.6)$$

donde  $\lambda_{ia}$  son los multiplicadores de lagrange, y pueden tomar cualquier valor dada la naturaleza de las restricciones que se relajan.

Si se simplifica el modelo relajado se obtiene el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \text{Min } z = & \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} ((c_{ia}^u + \lambda_{ia}) u_{ia} + (c_{ia}^o - \lambda_{ia}) o_{ia}) \\ & + \sum_{e \in E} \sum_{s \in \Omega^e} \left( c_s^e + \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} \lambda_{ia} \delta_{ias}^e \right) x_s^e + \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} \lambda_{ia} b_{ia} \end{aligned} \quad (4.7)$$

sujeto a

$$\sum_{s \in \Omega^e} x_s^e = 1 \quad \forall e \in E \quad (4.8)$$

$$x_s^e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E, s \in \Omega^e \quad (4.9)$$

$$u_{ia} \geq 0 \quad \forall i \in I, a \in A \quad (4.10)$$

$$o_{ia} \geq 0 \quad \forall i \in I, a \in A \quad (4.11)$$

$$\lambda_{ia} \in \mathbb{R} \quad (4.12)$$

El cual será resuelto haciendo uso del método subgradiente. En primera instancia, se tiene que fijar la matriz  $\Lambda$  de los multiplicadores  $\lambda_{ia}$ ; resultando, de esta manera, que el modelo puede ser separado en dos subproblemas. El primero, determina el incumplimiento y sobrecumplimiento de la demanda de cada actividad para cada periodo. El segundo, realiza la asignación de los turnos de cada empleado.



$$\begin{aligned}
(\text{SubP1}(\Lambda)) \text{ Min } z_1 = & \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} (c_{ia}^u + \lambda_{ia}) u_{ia} + (c_{ia}^o - \lambda_{ia}) o_{ia} \\
& - \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} \lambda_{ia} b_{ia}
\end{aligned} \quad (4.13)$$

sujeto a

$$u_{ia} \geq 0 \quad \forall i \in I, a \in A \quad (4.14)$$

$$o_{ia} \geq 0 \quad \forall i \in I, a \in A \quad (4.15)$$

$$(\text{SubP2}(\Lambda)) \text{ Min } z_2 = \sum_{e \in E} \sum_{s \in \Omega^e} \left( c_s^e + \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} \lambda_{ia} \delta_{ias}^e \right) x_s^e \quad (4.16)$$

sujeto a

$$\sum_{s \in \Omega^e} x_s^e = 1 \quad \forall e \in E \quad (4.17)$$

$$x_s^e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E, s \in \Omega^e \quad (4.18)$$

Ambos modelos tienen que ser resueltos para, después, optimizar los multiplicadores de lagrange por medio del método subgradiente. Notamos que cualquier secuencia de actividades, generada por la relajación, es factible, debido a la definición del conjunto  $\Omega^e$  en el modelo (MSC).

En el algoritmo 1, se presenta el pseudocódigo del método subgradiente. En la siguiente sección, se presentan los algoritmos para solucionar ambos subproblemas. Así mismo, se describe el método subgradiente de manera más detallada.

## 4.2 RESOLUCIÓN DE LOS SUBPROBLEMAS

En esta sección, se aborda la resolución de los subproblemas  $(\text{SubP1}(\Lambda))$  y  $(\text{SubP2}(\Lambda))$ .

---

**Algoritmo 1** Método Subgradiente

---

**Entrada:** Datos del problema.**Salida:** Mejor solución primal encontrada  $\widehat{Sol}$ ; mejor cota del problema primal  $\hat{f}$ ,  
y mejor cota de problema relajado  $\hat{f}'$ .

```
1: Sea  $\Lambda = (\lambda_{ia})_{i \in I, a \in A}$ 
2: Sea  $U = (u_{ia})_{i \in I, a \in A}$ 
3: Sea  $O = (o_{ia})_{i \in I, a \in A}$ 
4:  $\hat{f} \leftarrow \infty$ 
5:  $f \leftarrow \infty$ 
6:  $\hat{f}' \leftarrow -\infty$ 
7:  $f' \leftarrow -\infty$ 
8: para todo  $i \in I$  y  $a \in A$  hacer
9:    $\lambda_{ia} \leftarrow A_{ia}$  //Donde  $A_{ia}$  son constantes.
10: fin para
11: mientras  $|f - f'| < \varepsilon$  hacer
12:    $[U, O] \leftarrow \text{Resolver}(\text{SubP1}(\Lambda))$ 
13:    $Sol \leftarrow \text{Resolver}(\text{SubP2}(\Lambda))$ 
14:    $f \leftarrow \text{Evaluar}(Sol)$ 
15:    $[\Lambda, f'] \leftarrow \text{Actualizar\_Multiplicadores}(\Lambda, U, O, Sol, f)$ 
16:   si  $f < \hat{f}$  entonces
17:      $\hat{f} \leftarrow f$ 
18:      $\widehat{Sol} \leftarrow Sol$ 
19:   fin si
20:   si  $f' > \hat{f}'$  entonces
21:      $\hat{f}' \leftarrow f'$ 
22:   fin si
23: fin mientras
24: devolver  $[\widehat{Sol}, \hat{f}, \hat{f}']$ 
```

---

Para el subproblema (SubP1( $\Lambda$ )), se puede notar que las restricciones de este modelo sólo determinan que las variables de decisión  $u_{ia}$  y  $o_{ia}$  son positivas. Por ende, basta analizar los signos de los coeficientes que tienen dichas variables para determinar su valor.

En particular, al tratarse de un problema de minimización, se tiene que para los coeficientes positivos, las variables correspondientes toman el valor de cero. Por otro lado, para los coeficientes negativos, las variables correspondientes toman un valor positivo, las cuales deben de ser acotadas dada la naturaleza del problema.

Para la variable  $u_{ia}$ , correspondiente al número de asignaciones faltantes para cumplir a totalidad la demanda de la actividad  $a$  en el periodo  $i$ , se puede observar que el mayor valor que puede tomar resulta al no asignar la actividad  $a$  en el periodo  $i$  a ningún empleado, teniendo como consecuencia que la demanda correspondiente,  $b_{ia}$ , queda totalmente incumplida y, por ende,  $u_{ia} = b_{ia}$ .

Resultando que

$$u_{ia} = \begin{cases} 0 & \text{si } (c_{ia}^u + \lambda ia) \geq 0 \\ b_{ia} & \text{si } (c_{ia}^u + \lambda ia) < 0 \end{cases}$$

De la misma manera, el mayor valor que puede tomar la variable  $o_{ia}$ , correspondiente al número de asignaciones de la actividad  $a$  en el periodo  $i$  realizadas después de haber cumplido su demanda  $b_{ia}$ , queda determinado al suponer que todos los empleados realizan la actividad  $a$  en el periodo  $i$ . Teniendo que  $o_{ia} = |E| - b_{ia}$ , donde  $|E|$  es el número total de empleados.

Obteniendo que

$$o_{ia} = \begin{cases} 0 & \text{si } (c_{ia}^o - \lambda ia) \geq 0 \\ |E| - b_{ia} & \text{si } (c_{ia}^o - \lambda ia) < 0 \end{cases}$$

A continuación, en el algoritmo 2, se presenta el método de solución del subproblema SubP1.

---

**Algoritmo 2** Método para solucionar SubP1

---

**Entrada:** Matriz  $\Lambda$ .**Salida:** Solución  $[U, O]$ .

```

1: para todo  $i \in I$  hacer
2:   para todo  $a \in A$  hacer
3:     si  $(c_{ia}^u + \lambda_{ia}) < 0$  entonces
4:        $u_{ia} \leftarrow b_{ia}$ 
5:     si no
6:        $u_{ia} \leftarrow 0$ 
7:     fin si
8:     si  $(c_{ia}^o - \lambda_{ia}) < 0$  entonces
9:        $o_{ia} \leftarrow |E| - b_{ia}$ 
10:    si no
11:       $o_{ia} \leftarrow 0$ 
12:    fin si
13:  fin para
14: fin para
15: devolver  $[U, O]$ 

```

---

Como se mencionó con anterioridad, el conjunto  $\Omega^e$  puede ser caracterizado con el GAD  $\Gamma$  del empleado  $e$ . Es por ello que para el subproblema (SubP2( $\Lambda$ )), se propone solucionarlo haciendo uso del método de programación dinámica propuesto por Côté et al. (2013). Con ese fin, los multiplicadores  $\lambda_{ia}$  serán tomados como el peso de la actividad  $a$  al ser realizada en el periodo  $i$ .

Posteriormente, cada uno de los pesos  $\lambda_{ia}$  es colocado en la hoja del GAD  $\Gamma$  en la que aparezca la actividad  $a$  en la posición  $i$ . Para después realizar un retroceso en el árbol, de tal forma que en los nodos-y, los pesos que tenga cada una de las ramas se suman. Mientras que en los nodos-o, se toma la rama con el mínimo peso acumulado.

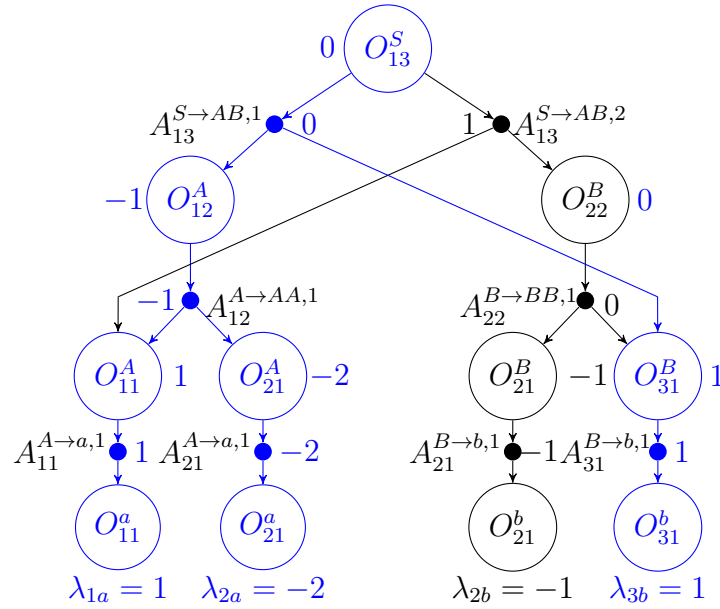


Figura 4.1: Solución gráfica del Ejemplo 4.1

Al llegar a la raíz del GAD  $\Gamma$ , es posible obtener el camino que genera la secuencia de actividades con un costo mínimo, basado en los pesos  $\lambda_{ia}$ , quedando resuelto el segundo subproblema.

En el Ejemplo 4.1, se muestra el funcionamiento del método de programación dinámica en un problema pequeño, con una gramática que genera secuencias de tres letras.

**Ejemplo 4.1** Si se considera que se quieren generar las secuencias de tres periodos utilizando la gramática del Ejemplo 3.4, se obtiene el GAD  $\Gamma$  mostrado en la Figura 3.2. Además, si

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se obtiene que la secuencia de menor costo es  $aab$ , tal y como se muestra en la Figura 4.1.

La restricción (4.17) es cumplida de manera trivial desde que sólo se elige la secuencia de costo mínimo para cada turno de cada empleado.

### 4.3 OPTIMIZACIÓN DE LOS MULTIPLICADORES $\Lambda$

Una vez resueltos los dos subproblemas, es necesario encontrar un conjunto de multiplicadores  $\lambda_{ia}$  que me generen una mejor solución. Para ello, se propone la utilización del método subgradiente introducido por Shor (1985).

Para obtener los multiplicadores en la  $k$ -ésima actualización  $\lambda_{ia}^k$ , se considera la siguiente ecuación:

$$\lambda_{ia}^k = \lambda_{ia}^{k-1} + \left[ \frac{s_{ia}^{k-1} \cdot \epsilon_{k-1} (f_{k-1} - f'_{k-1})}{\|s_{ia}^{k-1}\|_2} \right]$$

donde  $\epsilon_{k-1} \in (0, 2]$ ,  $f_{k-1}$  es la mejor evaluación encontrada hasta la iteración  $(k-1)$ , en el modelo (MSC), de la solución  $x_s^{e(k-1)}$ , obtenida con los multiplicadores  $\lambda_{ia}^{k-1}$ . Así mismo,  $f'_{k-1}$  es la mejor cota obtenida del modelo relajado (RMSC) hasta la iteración  $(k-1)$ , después de haber resuelto los subproblemas. Además,

$$s_{ia}^{k-1} = \sum_{e \in E} \sum_{s \in \Omega^e} \delta_{ias}^{e(k-1)} x_s^{e(k-1)} + u_{ia}^{k-1} - o_{ia}^{k-1} - b_{ia}.$$

Para este caso, el parámetro  $\epsilon_1$  se fija con el valor de dos, y va a ser actualizado dividiéndolo por la mitad, después de un cierto número de iteraciones en las que la cota del modelo relajado no mejora.

Como se mostró en el algoritmo 1, el criterio de paro que se eligió fue el siguiente:

$$|f - f'| < \varepsilon.$$

Sin embargo, como se observará en la siguiente sección, resulta ser ineficiente debido a la enorme diferencia entre ambas cotas. Es por ello, que se tomará el siguiente criterio:

$$\epsilon_k < \varepsilon.$$

Es decir, el algoritmo parará cuando las actualizaciones de la matriz  $\Lambda$  dejen de ser significativas para el método.

## 4.4 EXPERIMENTACIÓN

Para realizar las pruebas de algoritmo propuesto, se tomó el segundo conjunto de instancias descritas en el Apéndice A, presentado en el trabajo de Côté et al. (2013) e introducidas por Lequy et al. (2009). Los resultados que se presentaran más adelante, fueron obtenidos de los experimentos realizados sobre un procesador Intel Xeon, CPU E5-2687W, a 3.10 GHz con una memoria RAM de 62.9 Gb haciendo uso del lenguaje de programación C++.

La información requerida para la ejecución del algoritmo es:

- Un horizonte de planeación dividido en periodos de 15 minutos.
- Para cada actividad:
  - el número de empleados requerido para cada periodo;
  - los costos de incumplir o sobrecumplir la actividad correspondiente;
  - la cantidad mínima y máxima de periodos que puede ser realizada de manera continua.
- Para cada empleado:
  - los periodos de inicio y duración de sus turnos;
  - la lista de actividades que tiene capacidad de hacer.

La tarea es rellenar cada turno con una secuencia de actividades, de tal forma que cada empleado realice sólo las actividades que está capacitado hacer, y que la mínima y máxima duración de cada actividad asignada sea satisfecha. El objetivo es minimizar los costos de incumplimiento y sobrecumplimiento; así como, el costo asociado a las transiciones entre actividades existentes en cada turno.

Para iniciar la relajación lagrangiana, se tomaron los siguientes multiplicadores

$$\lambda_{ia} = -c_{ia}^u b_{ia}$$

ya que, en pruebas previas, mostraron tener mejores resultados que el fijarlos todos a cero.

Como criterio de paro, se tomó  $\varepsilon = 0.00001$ .

En las tablas que se anexan en el Apéndice B, se presentan los resultados obtenidos con el algoritmo propuesto, en comparativa con los mejores resultados reportados en la literatura, los cuales fueron generados por medio de un método exacto.

A continuación se muestra una tabla que muestra los gaps y el tiempo de resolución promedio de cada conjunto de instancias. La columna  $\text{Gap}(MRL/RL)$ , corresponde al gap promedio entre los resultados obtenidos con el método constructivo y la mejor cota lagrangiana. Mientras que la columna  $\text{Gap}(BP/RL)$ , corresponde al gap promedio correspondientes a los mejores resultados de la literatura y la mejor cota lagrangiana.

Conjunto de Instancias	$\text{Gap}(MRL/RL)$ ( %)	$\text{Gap}(BP/RL)$ ( %)	Tiempo (s)
1_50_10_s1	320	3.43	18.42
1_50_10_s2	248	2.08	8.33
2_75_12	788	6.43	256.44
7_20_5_s1	667	0.69	95.47
7_20_5_s2	80.66	0.0002	9.24
7_50_7	447	0.64	161.23
7_50_10	1456	2.08	757.07
7_100_15	853	2.39	1062.06

Como se puede notar en la tabla anterior, las cotas lagrangianas quedaron muy



cerca de los mejores resultados reportados, teniendo como resultado un promedio de 2.22 % de gap para todas las instancias. Sin embargo, las cotas primales generadas resultan tener, en su mayoría, un gap del más del 100 %.

Al analizarlo de manera más detallada, la ineficiencia del método, para obtener buenas soluciones factibles, se le puede atribuir a situaciones en las que los turnos de dos o más empleados se traslapan. Es decir, que hay empleados que coinciden en todos o en algunos periodos de trabajo.

En la Figura 4.2 se muestra un ejemplo gráfico en el que los turnos  $s_1^{e_2}$  y  $s_2^{e_1}$ , correspondientes a los empleados  $e_2$  y  $e_1$ , se traslapan totalmente en los periodos del  $i_3$  al  $i_4$ . En este ejemplo, se puede hacer notar que si los empleados  $e_1$  y  $e_2$  tienen las mismas habilidades, entonces van a realizar la mismas actividades. Debido a que las secuencias generadas con el método propuesto dependen de los pesos asignados ( $\Lambda$ ); a ambos empleados se les asigna el mismo turno independientemente de la cobertura.

De tal forma que si la actividad  $a_1$  se tiene que asignar al turno  $s_1^{e_2}$ , entonces también se asignará al turno  $s_2^{e_1}$ . Aún y cuando las demandas de la actividad  $a_1$ , queden satisfechas al asignar  $a_1$  a sólo uno de los turnos. Descartando la posibilidad de hacer uso de alguno de ellos para satisfacer los requerimientos de una actividad distinta.

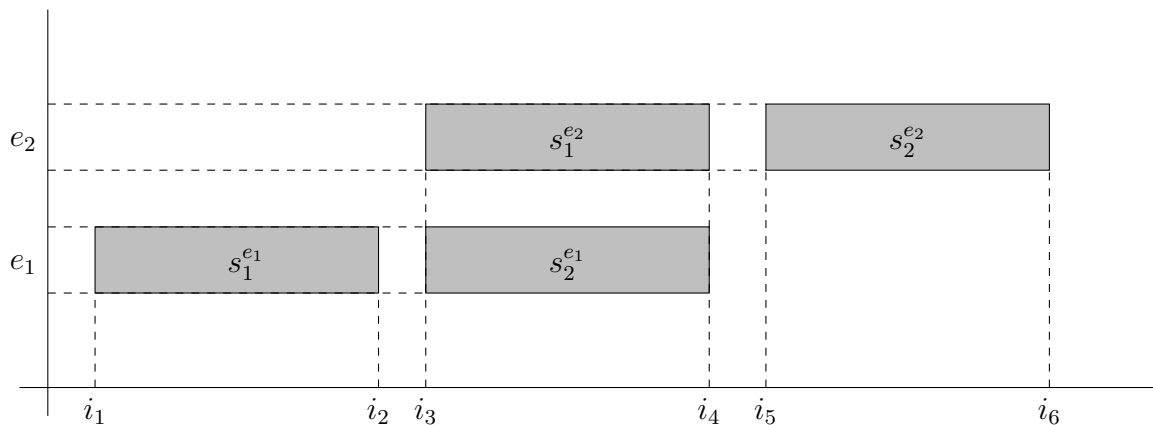


Figura 4.2: Ejemplo de dos empleados con turnos que se traslapan.

## CAPÍTULO 5

# MÉTODOS CONSTRUCTIVOS POR ETAPAS BASADOS EN RELAJACIÓN LAGRANGIANA

---

En este capítulo se presentarán dos métodos constructivos en los que se realizan asignaciones por etapas; al primero, le llamaremos MAEE (Método de Asignación de Empleados por Etapas) y, al segundo, MATE (Método de Asignación de Turnos por Etapas). El objetivo de estos métodos, es erradicar los problemas por los que el algoritmo anterior resulta ineficiente.

## 5.1 MÉTODO DE ASIGNACIÓN DE EMPLEADOS POR ETAPAS

Como se mencionó en el capítulo anterior, una de las razones del mal funcionamiento del algoritmo de la relajación lagrangiana, para la generación de buenas soluciones, es el traslape de los turnos de dos o más empleados. Por esta razón, se trabajará con la idea de que los pesos ( $\Lambda$ ) generados por la relajación funcionan eficientemente, para el caso en el que no existen traslapes en los turnos de los empleados.

En ese sentido, se propone construir una solución por etapas. En las que en

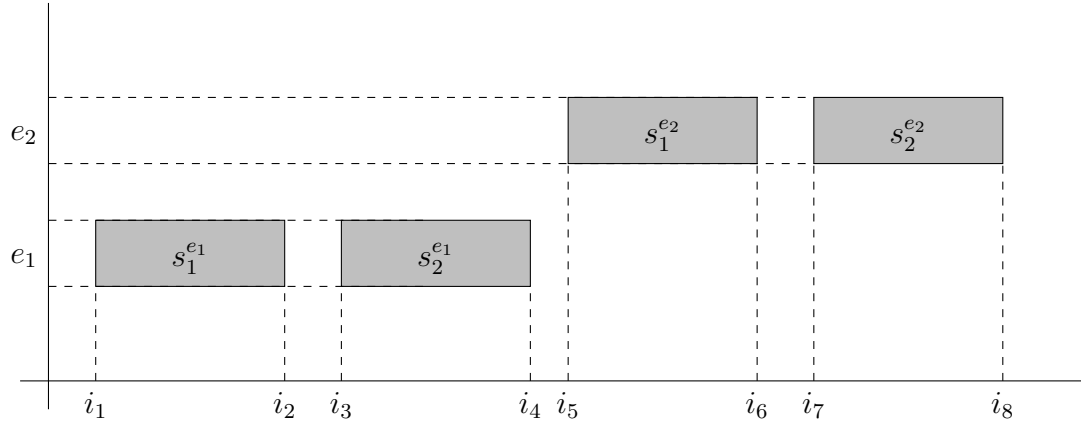


Figura 5.1: Ejemplo de dos empleados con turnos que no se traslapan.

cada una de ellas, se asigna la mayor cantidad de empleados, de tal forma que no coincidan en ningún periodo de trabajo. Tal y como se muestra en el ejemplo de la Figura 5.1.

### 5.1.1 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

En esta sección, se formula un método iterativo, en el que, al inicio, se realiza una relajación lagrangiana del problema para obtener los pesos ( $\Lambda$ ) que generan la mejor solución primal. En seguida, se eligen aquellos empleados que tengan turnos disjuntos para, después, asignarles una secuencia haciendo uso del algoritmo utilizado para resolver el subproblema SubP2, en el capítulo anterior. Posteriormente, se realiza una actualización de la matriz de demandas  $B$ , tomando en cuenta la información de las asignaciones que se realizaron anteriormente. Es decir,

$$b'_{ia} = b_{ia} - \sum_{e \in E_p} \sum_{s \in \Omega^e} \delta_{ias}^e \quad \forall i \in I, a \in A,$$

donde  $E_p$  representa el conjunto de empleados asignados.

Una vez hecho esto, se obtiene un nuevo problema de asignación de horarios a empleados, con las nuevas demandas y los empleados que aún no han sido asignados. A dicho problema se le aplica relajación lagrangiana. Para, después, repetir las

acciones anteriores.

Este proceso se realizará hasta que los turnos de todos los empleados sean asignados.

A continuación, en el Algoritmo 3, se presenta el pseudocódigo del método antes mencionado.

---

**Algoritmo 3** Método de asignación de empleados por etapas

---

**Entrada:** Datos del problema.

**Salida:** Solución construida  $Sol$

```

1: Sea  $\Lambda = (\lambda_{ia})_{i \in I, a \in A}$ 
2:  $Sol \leftarrow \emptyset$ 
3:  $E' \leftarrow E$ 
4:  $B' \leftarrow B$ 
5: para todo  $i \in I$  y  $a \in A$  hacer
6:    $\lambda_{ia} \leftarrow A_{ia}$  //Donde  $A_{ia}$  son constantes.
7: fin para
8: mientras  $E' \neq \emptyset$  hacer
9:    $\Lambda \leftarrow \text{Relajación\_Lagrangiana}(E', B', \Lambda)$ 
10:   $E_p \leftarrow \text{Elección\_Empleados}(E')$  //conjunto de empleados con turnos
                                         que no se traslapan.
11:   $S_{E_p} \leftarrow \text{Asignar}(E_p, \Lambda)$  //conjunto de turnos asignados.
12:   $E' \leftarrow E' \setminus E_p$ 
13:   $B' \leftarrow \text{Actualizar\_Demandas}(B', S_{E_p})$ 
14:   $\Lambda \leftarrow \text{Actualizar\_Multiplicadores}(\Lambda, E_p, B')$ 
15:   $Sol \leftarrow Sol \cup S_{E_p}$ 
16: fin mientras
17: devolver  $Sol$ 

```

---

La función Relajación\_Lagrangiana presentada en el Algoritmo 3, hace referencia al método presentado en el capítulo 4.

Así mismo, la función Actualizar\_Multiplicadores, reinicializa, con los valores iniciales, los multiplicadores correspondientes a las actividades asignadas en los periodos de cada uno de los turnos fijados, con los valores iniciales de  $\Lambda$ . Mientras que los demás, se dejan con el mismo valor. Esto con el motivo de reducir el trabajo computacional, al no recalcular los multiplicadores que no son utilizados y que ya son eficientes.

### 5.1.2 EXPERIMENTACIÓN

Para realizar las pruebas de algoritmo propuesto, se tomó el segundo conjunto de instancias, presentado en el trabajo de Côté et al. (2013) e introducidas por Lequy et al. (2009). Los resultados que se presentaran más adelante, fueron obtenidos de los experimentos realizados sobre un procesador Intel Xeon, CPU E5-2687W, a 3.10 GHz con una memoria RAM de 62.9 Gb haciendo uso del lenguaje de programación C++.

Para iniciar las pruebas, se tomaron los siguientes multiplicadores

$$\lambda_{ia} = -c_{ia}^u b_{ia}.$$

En las tablas presentadas en el Apéndice B, se puede observar que los resultados obtenidos con el método de asignaciones por etapas, están cerca del óptimo, logrando menos del 5 % de gap en la mayoría de las instancias. Incluso, en la instancia 1855, presentada en la Tabla B.12, se logró obtener una mejor solución que la obtenida en la literatura.

A continuación, se muestra una tabla con los gaps y el tiempo de resolución promedio de cada conjunto de instancias. La columna  $\text{Gap}(MAEE/RL)$ , corresponde al gap promedio obtenido entre los resultados alcanzados con el método de asignación de empleados por etapas y la mejor cota lagrangiana. Mientras que la columna  $\text{Gap}(BP/MAEE)$ , corresponde al gap promedio obtenido entre los mejo-

res resultados reportados en la literatura y la mejor cota obtenida con el método propuesto.

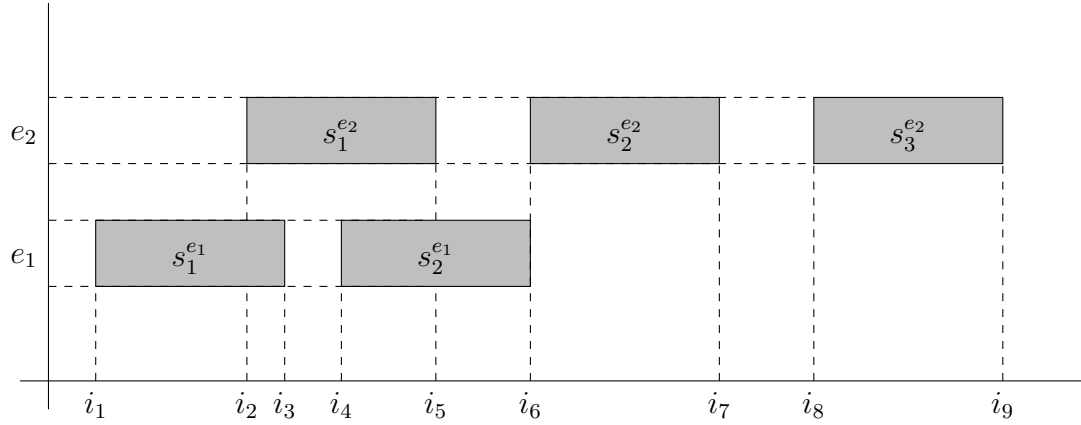
Conjunto de Instancias	Gap( $MAEE/RL$ ) (%)	Gap( $BP/MAEE$ ) (%)	Tiempo (s)
1_50_10_s1	5.89	2.13	233.008
1_50_10_s2	5.69	3.43	225.94
2_75_12	8.85	2.40	7121.83
7_20_5_s1	1.30	0.58	832.57
7_20_5_s2	2.13	2.12	86.20
7_50_7	1.31	0.66	3129.56
7_50_10	3.61	1.45	15768.84
7_100_15	3.80	1.31	37358.74

Como se observa en la tabla anterior, el método de asignación de empleados por etapas, genera buenas soluciones para el problema. Sin embargo, la obtención de estos resultados es tardada. Al realizar la experimentación, se notó que la tardanza del método se debe a que en cada iteración se asignan a lo más dos empleados, para la mayoría de las instancias.

## 5.2 MÉTODO DE ASIGNACIÓN DE TURNOS POR ETAPAS

La desventaja del método de asignación de empleados por etapas, es lo tardado que resulta, debido a la forma en que se eligen los empleados a asignar. Es por ello, que se propone una asignación de turnos por etapas. Considerando, esta vez, asignar la mayor cantidad de turnos disjuntos. En la siguiente figura se presenta un ejemplo para el cual, la elección de turnos para asignar es más eficiente, que la elección de empleados.

En el ejemplo, se puede observar que si eligiéramos por empleados, sólo se



tomaría a uno de los empleados en una iteración y, en el mejor de los casos, se fijarían tres turnos. Por otro lado, si se selecciona por turnos, se asignarían los turnos  $s_1^{e1}$ ,  $s_2^{e1}$ ,  $s_2^{e2}$  y  $s_3^{e2}$ . Teniendo que se determina una mayor cantidad de turnos en cada fase.

### 5.2.1 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Para la construcción de este método, se propone realizar una relajación lagrangiana del problema para obtener los pesos ( $\Lambda$ ) que generan la mejor solución primal. En seguida, se elige la mayor cantidad de turnos disjuntos para, después, asignarles una secuencia haciendo uso del algoritmo utilizado para resolver el subproblema SubP2, en el capítulo anterior.

Posteriormente, se realiza una actualización de la matriz de demandas  $B$ , tomando en cuenta la información de las asignaciones que se realizaron anteriormente. Es decir,

$$b'_{ia} = b_{ia} - \sum_{e \in E} \sum_{s \in \Omega'_e} \delta_{ias}^e \quad \forall i \in I, a \in A,$$

donde  $\Omega'_e$  es el conjunto de turnos del empleado  $e$  asignados.

Una vez hecho esto, se obtiene un nuevo problema de asignación de horarios a empleados, con las nuevas demandas y los empleados que aún no han sido asignados. A dicho problema se le aplica relajación lagrangiana. Para, después, repetir las

acciones anteriores.

Este proceso se realizará hasta que todos los turnos son asignados. En el Algoritmo 4, se presenta el pseudocódigo de este método.

Para realizar la elección de los turnos que se van a asignar, en la función Elección\_Turnos en el Algoritmo 4, se utiliza una heurística. En dicha heurística, se toma como inicio el periodo inicial en el horizonte de planeación para, posteriormente, seleccionar el turno no asignado tal que la distancia entre el periodo inicial y el periodo de inicio del turno sea la mínima. Posteriormente, se toma el periodo de culminación del turno seleccionado, como referencia para seleccionar el siguiente; este proceso se repite hasta que no haya más turnos a asignar.

---

**Algoritmo 4** Método de asignación de turnos por etapas

---

**Entrada:** Datos del problema.

**Salida:** Solución construida  $Sol$

```

1: Sea  $\Lambda = (\lambda_{ia})_{i \in I, a \in A}$ 
2:  $T \leftarrow \Omega$  //conjunto de todos los turnos a asignar.
3:  $T' \leftarrow \emptyset$  //conjunto de turnos posibles a asignar.
4: para todo  $i \in I$  y  $a \in A$  hacer
5:    $\lambda_{ia} \leftarrow A_{ia}$  //Donde  $A_{ia}$  son constantes.
6: fin para
7: mientras  $T \neq \emptyset$  hacer
8:    $\Lambda \leftarrow \text{Relajación\_Lagrangiana}(B, \Lambda)$ 
9:    $T' \leftarrow \text{Elección\_Turnos}(T)$ 
10:   $\text{Asignar}(T', \Lambda)$ 
11:   $T \leftarrow T \setminus T'$ 
12:   $B \leftarrow \text{Actualizar\_Demandas}(B, T')$ 
13:   $\Lambda \leftarrow \text{Actualizar\_Multiplicadores}(\Lambda, T', B)$ 
14:   $Sol \leftarrow Sol \cup T'$ 
15: fin mientras
16: devolver  $Sol$ 

```

---



### 5.2.2 EXPERIMENTACIÓN

Las pruebas fueron realizadas bajo las mismas condiciones que en las descritas en la sección 5.1.1 y se usan las instancias presentadas en el Apéndice A.

En las tablas presentadas en el Apéndice B, se puede hacer notar que, como se esperaba, los tiempos de resolución se redujeron considerablemente. Sin embargo la calidad de dichas soluciones se redujo.

En la Tabla 5.1 se presenta una comparativa entre los gaps promedio; así como el tiempo promedio de resolución para cada conjunto de instancias. En la columna  $\text{Gap}(MATE/RL)$  se presenta al gap promedio correspondiente a los resultados obtenidos con el método de asignación de turnos por etapas y la mejor cota lagrangiana encontrada. Mientras que en la columna  $\text{Gap}(BP/MATE)$  aparecen los gaps promedio relacionados con los resultados presentados en la literatura y los mejores resultados obtenidos con este enfoque.

Conjunto de Instancias	$\text{Gap}(MATE/RL)$ ( %)	$\text{Gap}(BP/MATE)$ ( %)	Tiempo (s)
1_50_10_s1	28.41	24.02	35.94
1_50_10_s2	9.04	6.70	13.88
2_75_12	107.46	93.72	1305.83
7_20_5_s1	7.73	6.97	125.57
7_20_5_s2	3.74	3.74	5.79
7_50_7	17.21	16.47	243.62
7_50_10	30.74	27.95	3205.83
7_100_15	60.77	56.98	4717.18

Tabla 5.1: Comparativa de resultados de método de asignación de turnos por etapas.

En la Tabla 5.1, se puede observar que el gap promedio de los resultados ob-

tenidos es de 33 %. Sin embargo, se puede hacer notar que los tiempos promedio de resolución se redujeron en más de 50 % en comparación con el método de asignación de empleados por etapas.

Una de las razones posibles que explica la ineficiencia del método, radica en la heurística de selección de turnos. Ya que no toma en cuenta el orden en que fueron tomados dichos turnos en la relación lagrangiana. En experimentaciones posteriores, se pudo comprobar que el orden en que se toman los turnos, afecta en la calidad de la solución obtenida.

## CAPÍTULO 6

# MÉTODO HÍBRIDO BASADO EN RELAJACIÓN LAGRANGIANA

---

En los capítulos anteriores, se presentaron métodos heurísticos basados en relajación lagrangiana. Las pruebas realizadas con estos métodos, dan indicios de que la relajación lagrangiana es capaz de generar turnos de buena calidad.

Bajo esta premisa, el problema se reduce a encontrar la mejor combinación de turnos dentro del conjunto de todos los turnos generados durante la relajación lagrangiana.

En la siguiente sección se muestra a detalle un método híbrido para resolver el SSP, al cual llamaremos MH (Método Híbrido basado en relajación lagrangiana).

### 6.1 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO HÍBRIDO

Para encontrar la mejor combinación, se propone construir todos los conjuntos  $\Omega'_e$  a partir de todos los turnos posibles para el empleado  $e$ , generados durante la relajación lagrangiana. Es decir, se guardarán los turnos generados a cada iteración del método subgradiente.

Posteriormente, estos conjuntos son pasados como parámetro para el modelo (MSC), dando lugar al siguiente modelo:

$$(\text{SMSC}) \quad \text{Min } z = \sum_{e \in E} \sum_{s \in \Omega'_e} c_s^e x_s^e + \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} (c_{ia}^u u_{ia} + c_{ia}^o o_{ia}) \quad (6.1)$$

sujeto a

$$\sum_{e \in E} \sum_{s \in \Omega'_e} \delta_{ias}^e x_s^e + u_{ia} - o_{ia} = b_{ia} \quad \forall i \in I, a \in A \quad (6.2)$$

$$\sum_{s \in \Omega'_e} x_s^e = 1 \quad \forall e \in E \quad (6.3)$$

$$x_s^e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E, s \in \Omega'_e \quad (6.4)$$

$$u_{ia} \geq 0 \quad \forall i \in I, a \in A \quad (6.5)$$

$$o_{ia} \geq 0 \quad \forall i \in I, a \in A \quad (6.6)$$

Es fácil notar, que es más sencillo resolver el modelo (SMSC) debido a que  $\Omega'_e$  contiene una cantidad considerablemente menor de turnos que  $\Omega^e$ . Es por ello, que se propone solucionar el modelo (SMSC) haciendo uso de un *solver* comercial como CPLEX.

En el Algoritmo 5, se presenta el pseudocódigo del método antes mencionado.

---

**Algoritmo 5** Método híbrido basado en relajación lagrangiana

---

**Entrada:** Datos del problema.

**Salida:** Solución encontrada *Sol*

- 1:  $\Omega \leftarrow \text{Relajacion\_Lagrangiana}(MSC)$       //Conjunto de todos los  $\Omega'_e$
  - 2:  $SMSC \leftarrow \text{Construir\_Modelo}(\Omega)$
  - 3:  $Sol \leftarrow \text{Resolver}(SMSC)$
  - 4: **devolver** *Sol*
- 

Donde la función *Relajacion\_Lagrangiana*, hace referencia al método propuesto en el capítulo 4; la función *Construir\_Modelo*, crea el modelo SMSC a partir de los turnos generados por la relajación lagrangiana; por último, la función *Resolver* soluciona el modelo mediante el uso de Cplex.

## 6.2 EXPERIMENTACIÓN

Las pruebas fueron realizadas bajo las mismas condiciones que en las descritas en la sección 5.1.1, con las instancias presentadas en el Apéndice A, y haciendo uso de Cplex 12.6 para la resolución del modelo (SMSC).

Para correr el programa se establecieron los siguientes parámetros:

- Para el método subgradiente:
  - Un valor inicial de  $\lambda = 2$ ;
  - Un valor mínimo para  $\lambda$  de 0.0001;
  - Un número de iteraciones antes de reducir el paso de 75.
- Para condición de paro de Cplex:
  - Un gap de 0.02.

Además, se agrega una condición de paro más, la cual consiste en revisar la mejor solución encontrada por cplex en periodos de 300 segundos. Si la solución incumbente mejora después de este periodo, el método sigue durante 300 segundos más o hasta alcanzar el gap que se establece en la primera condición; si no, el método para y reporta la mejor solución obtenida.

En las tablas del Apéndice B, se muestran los resultados obtenidos con el método híbrido basado en relajación lagrangiana. Se puede notar que en 32.5% de las instancias que fueron probadas se obtuvieron mejores resultados que los mejores reportados en la literatura. Así mismo, en sólo tres del total de las instancias, el método reportó soluciones de menor calidad, aunque hay que notar que la única diferencia entre estos resultados y los mejores reportados, es tan sólo el costo de una transición. En las instancias restantes, se obtuvieron los mismos resultados que los mejores reportados en la literatura.

En la siguiente tabla, se muestra el rendimiento de este método. En la columna  $\text{Gap}(MH/RL)$  se muestran los gaps promedio entre la solución y la mejor cota lagrangiana, y en la columna  $\text{Gap}(BP/MH)$  se muestran los gaps promedio entre la mejor solución reportada en la literatura y la mejor cota lagrangiana encontrada; así como los tiempos promedio de resolución con la metodología propuesta, para cada conjunto de instancias.

Conjunto de Instancias	$\text{Gap}(MH/RL)$ (%)	$\text{Gap}(BP/MH)$ (%)	Tiempo (s)
<b>1_50_10_s1</b>	<b>3.08</b>	<b>-0.70</b>	<b>49.72</b>
1_50_10_s2	2.31	0.16	9.06
<b>2_75_12</b>	<b>5.09</b>	<b>-1.92</b>	<b>2447.56</b>
7_20_5_s1	0.69	0	94.81
7_20_5_s2	0.0002	0	12.79
7_50_7	0.64	0	1209.29
<b>7_50_10</b>	<b>1.77</b>	<b>-0.37</b>	<b>231.07</b>
<b>7_100_15</b>	<b>2.19</b>	<b>-0.24</b>	<b>2320.83</b>

Se puede observar que el gap promedio para las instancias probadas es de 1.97 %. Resultando mejor que las metodologías propuestas en los capítulos anteriores. No sólo en la calidad de los resultados sino también en los tiempos de resolución. Los resultados obtenidos, muestran que la relajación lagrangiana es capaz de generar turnos de buena calidad para el problema de planeación de horarios a empleado con múltiples actividades.

## CAPÍTULO 7

# CONCLUSIONES

---

En esta tesis, se presentaron cuatro métodos constructivos haciendo uso de las gramáticas libres de contexto y de la relajación lagrangiana. Un aspecto importante de estos métodos, es que, al ser basados en relajación lagrangiana, es posible obtener una cota inferior para este problema y, consecuentemente, una medida que determine la calidad de las soluciones que se están obteniendo.

En el capítulo 4, se presenta un método constructivo basado en relajación lagrangiana. Al realizar la experimentación correspondiente, nos fue posible observar que este método es capaz de generar buenas cotas inferiores para el problema de planeación de horarios a empleados. Sin embargo, las soluciones factibles generadas fueron de mala calidad, con un gap promedio de 600 %; es decir, en promedio, un valor de función objetivo seis veces más grande que la solución óptima del problema. Así mismo, se pudo detectar la razón de la mala calidad de estas soluciones.

En el capítulo 5, se presentan dos métodos basados en una asignación por etapas y en la relajación lagrangiana, con la idea de solucionar las deficiencias del método presentado en el capítulo 4. La experimentación realizada con dichos métodos, no hace notar que es posible generar buenas soluciones. Prueba de ello, es la obtención del 4.07 % de gap promedio al resolver todas las instancias con el método de asignación de empleados por etapas. Sin embargo, la insuficiencia del método radica en la tardanza del mismo.

El método de asignación de turnos por etapas surge como solución a las deficien-

cias presentadas por el método de asignación de empleados por etapas. Resultando, éste, mejor en tiempos, pero reduciendo la calidad de las soluciones. La experimentación realizada hasta el momento, da indicios de que la relajación lagrangiana produce turnos de buena calidad. Reduciendo el problema, a encontrar la mejor combinación.

Por esta razón, en el capítulo 6, se propone un método híbrido basado en relajación lagrangiana. La experimentación correspondiente, nos hace notar la eficiencia del método al encontrar mejores soluciones que las mejores soluciones encontradas en la literatura, en un 32.5 % de los casos. Además, se obtuvo un gap promedio de 1.97 % con esta metodología, en comparación con el 2.21 % de gap promedio obtenido de las mejores soluciones reportadas en la literatura.

De manera general, la experimentación realizada a lo largo de esta tesis, demuestra que es posible generar soluciones de buena calidad con métodos basados en relajación lagrangiana y gramáticas libres de contexto. En la Tabla 7.1 se muestra una comparativa de los resultados promedio obtenidos con los métodos propuestos y los mejores resultados reportados en la literatura, para cada conjunto de instancias. Se puede observar que el método híbrido obtuvo el mejor rendimiento, obteniendo un gap promedio de 1.97 % en la resolución de todas las instancias, contra el 2.21 % de gap promedio obtenido de los mejores resultados reportados en la literatura.

Finalmente, el objetivo planteado al inicio de este trabajo de tesis, es logrado en su totalidad. Demostrando que la relajación lagrangiana en conjunto con las gramáticas libres de contexto, pueden generar métodos eficientes para resolver el problema de planeación de horarios a empleados.



Conjunto de Instancias	Método Constructivo Basado en Relajación Lagrangiana				Método de Asignación de Empleados por Etapas				Método de Asignación de Turnos por Etapas Basado en Relajación Lagrangiana				Resultados de la Literatura	
	Gap (%)		Tiempo (s)		Gap (%)		Tiempo (s)		Gap (%)		Tiempo (s)		Gap (%)	
	Gap (%)	Tiempo (s)	Gap (%)	Tiempo (s)	Gap (%)	Tiempo (s)	Gap (%)	Tiempo (s)	Gap (%)	Tiempo (s)	Gap (%)	Tiempo (s)	Gap (%)	Tiempo (s)
1_50_10_s1	320	18.42	3.61	233.008	28.41	35.94	3.08	49.72	3.43					
1_50_10_s2	248	8.33	2.14	225.94	9.04	13.88	2.31	9.06	2.08					
2_75_12	788	256.44	6.92	7121.83	107.46	1305.83	5.09	2447.56	6.43					
7_20_5_s1	667	95.47	0.70	832.57	7.73	125.57	0.69	94.81	0.69					
7_20_5_s2	80.66	9.24	0.0002	86.20	3.74	5.79	0.0002	12.79	0.0002					
7_50_7	447	161.23	0.64	3129.56	17.21	243.62	0.64	1209.29	0.64					
7_50_10	1456	757.07	2.13	15768.84	30.74	3205.83	1.77	231.07	2.08					
7_100_15	853	1062.06	2.45	37358.74	60.77	4717.18	2.19	2320.83	2.39					

Tabla 7.1: Tabla comparativa de los métodos propuestos.

## CAPÍTULO 8

# TRABAJO A FUTURO

---

Como trabajo a futuro se propone mejorar los algoritmos para alcanzar un mejor tiempo de resolución. El resolver de manera exacta el problema de cubrimiento de conjuntos del método híbrido, es muy tardado. Es por ello, que se idea diseñar un método heurístico para resolverlo. En la literatura se muestran diversos enfoques para darle solución a este problema: *Greedy* (Chvatal (1979) y Goldschmidt et al. (1993)), algoritmos genéticos (Beasley and Chu (1996)), y GRASP (Bautista and Pereira (2007)), entre otros.

Así mismo, se plantea extender estos métodos a un problema de planeación de horarios a empleados con tareas, donde las tareas son actividades que no se realizan de manera cotidiana pero que resultan esenciales para las operaciones de un negocio. Además, se consideran restricciones de precedencia, así como una duración preestablecida y una ventana de tiempo en la que tienen que ser realizadas.

Por ejemplo, el mantenimiento de una máquina es una actividad que no es realizada diariamente y está planeada para ciertos periodos de tiempo. También, le preceden una serie de tareas como el apagado o la detención de dicha máquina y la preparación del instrumental necesario

Por último, se proyecta considerar restricciones de *Team Task*, que permiten que una tarea pueda ser realizada de manera sincronizada por varios empleados, reduciendo los tiempos de procesamiento de dichas tareas. La descarga de camiones es un ejemplo de ello, ya que es una tarea que puede ser ejecutada por más de

---

un empleado a la vez y, consecuentemente, el camión puede ser descargado más rápidamente.

## APÉNDICE A

# INSTANCIAS

---

En esta tesis se trabajara con un conjunto de 40 instancias presentadas por Côté et al. (2013), e introducidas por Lequy et al. (2009), las cuales están divididas en 8 clases. En la siguiente tabla, se muestran dichas clases y el nombre de las instancias que pertenecen a cada una de ellas. Donde en la columna  $D\_E\_A$ , se encuentran las instancias en las que se trabaja  $D$  días, con  $E$  empleados disponibles y  $A$  actividades a realizar. Para las clases que tienen el mismo tamaño, se les agrega  $s1$  y  $s2$  para diferenciarlas.

1_50_10_s1	1_50_10_s2	2_75_12	7_20_5_s1	7_20_5_s2	7_50_7	7_50_10	7_100_15
1808	342	1855	1024	1024	5600	1007	530
5066	369	2106	1773	1773	592	156	1024
5135	71	2435	2732	2732	8597	237	2596
5226	737	4225	4657	4657	9445	4369	6384
8854	896	9863	5553	5553	949	5216	7862

En las columnas 1 y 2, y 4 y 5, se puede observar que las instancias presentadas son del mismo tamaño. Las diferencias entre ellas, radican en que en las clases  $s1$  (columnas 1 y 4), los empleados son capaces de realizar un número mayor de actividades, y los turnos de los empleados, en su mayoría, son más grandes. Estas dos características dan paso a un mayor número de soluciones factibles.

Cada una de las instancias nos proporciona la siguiente información:

- Número de periodos en los que se divide el horizonte de planeación.

- 
- El número de empleados disponibles. Así como las actividades que cada uno puede realizar, y los periodos de inicio y duración de cada uno de sus turnos.
  - El número de actividades a realizar y, para cada una de ellas, la información de las demandas para cada periodo, la cantidad de periodos máxima y mínima que puede ser realizada, y los costos de incumplir y sobrecumplir con la demanda de cada periodo.

## APÉNDICE B

# APÉNDICE: TABLAS

---

### B.1 TABLAS: MÉTODO CONSTRUCTIVO BASADO EN RELAJACIÓN LAGRANGIANA (MRL)

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota primal	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1024	7179.59	48370	99.74	7220
1773	6335.02	55720	72.96	6345
2732	7377.49	55225	112.37	7420
4657	6290.87	48905	89.66	6400
5553	7497	57020	102.65	7535

Tabla B.1: Resultados del método basado en la relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 7 días, 20 empleados y 5 actividades (7\_20\_5\_s1).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota primal	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1808	3057.69	9115	14.65	3270
5066	2358.28	12200	24.79	2440
5135	2554.16	9305	16.21	2580
5226	2696.41	10945	18.10	2725
8854	2623.53	13615	18.37	2770

Tabla B.2: Resultados del método basado en la relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 1 días, 50 empleados y 10 actividades (1\_50\_10\_s1).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota primal	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1007	13842.4	200725	744	14115
156	13287.9	216330	766.33	13420
237	13237.5	205355	695.71	13590
4369	13245.9	220305	783.71	13675
5216	14536.9	216885	795.62	14800

Tabla B.3: Resultados del método basado en la relajación lagrangiana, para instancias de 7 días, 50 empleados y 10 actividades (7\_50\_10).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota primal	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1855	5688.43	54345	263.36	6185
2106	6153.77	53245	288.59	6525
2435	5505.24	54595	235.44	6050
4225	5853.95	43005	214.98	6255
9863	5692.41	51095	279.83	5870

Tabla B.4: Resultados del método basado en la relajación lagrangiana, para instancias de 2 días, 75 empleados y 12 actividades (2\_75\_12).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota primal	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1024	2939.99	5690	8.8	2940
1773	2769.99	4640	10.35	2770
2732	3820	4920	8.25	3820
4657	3209.99	5960	9.47	3210
5553	3269.99	7450	9.34	3270

Tabla B.5: Resultados del método basado en la relajación lagrangiana, para el segundo conjunto de instancias de 7 días, 20 empleados y 5 actividades (7\_20\_5\_s2).



Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota primal	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
342	1843.01	8555	10.71	1875
369	2270.42	5300	9.32	2315
71	2049.55	4910	5.46	2050
737	2000.59	7690	8.12	2065
896	1806.71	7625	8.04	1875

Tabla B.6: Resultados del método basado en la relajación lagrangiana, para el segundo conjunto de instancias de 1 días, 50 empleados y 10 actividades (1\_50\_10\_s2).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota primal	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
5600	8331.09	48055	159.5	8440
592	7310.7	51235	186.69	7345
8597	7599.07	40410	144.12	7645
9445	7884.13	27935	128.19	7900
949	8101.67	46500	187.68	8155

Tabla B.7: Resultados del método basado en la relajación lagrangiana, para las instancias de 7 días, 50 empleados y 7 actividades (7\_50\_7).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota primal	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
530	14833.4	148950	1415.33	15200
1024	15043.6	156760	1141.19	15420
2596	15460.9	118790	994.84	15855
6384	14963.7	177455	908.02	15250
7862	15503.2	119295	850.92	15940

Tabla B.8: Resultados del método basado en la relajación lagrangiana, para las instancias de 7 días, 100 empleados y 15 actividades (7\_100\_15).

## B.2 TABLAS: MÉTODO DE ASIGNACIÓN DE EMPLEADOS POR ETAPAS (MAEE)

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota encontrada	Gap (%)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1024	7179.59	7250	0.98	827.77	7220
1773	6335.02	6345	0.15	651.77	6345
2732	7377.49	7435	0.77	1054.33	7420
4657	6290.87	6430	2.21	644.03	6400
5553	7497	7675	2.37	984.95	7535

Tabla B.9: Resultados del método basado en asignación de empleados por etapas, para el primer conjunto de instancias de 7 días, 20 empleados y 5 actividades (7\_20\_5\_s1).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1808	3057.69	3525	15.28	237.52	3270
5066	2358.28	2440	3.46	234.82	2440
5135	2554.16	2580	1.01	231.63	2580
5226	2696.41	2725	1.06	215.41	2725
8854	2623.53	2850	8.63	245.65	2770

Tabla B.10: Resultados del método basado en asignación de empleados por etapas, para el primer conjunto de instancias de 1 días, 50 empleados y 10 actividades (1\_50\_10\_s1).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1007	13842.4	14405	4.06	15782.7	14115
156	13287.9	13495	1.55	15354	13420
237	13237.5	13945	5.34	14825.3	13590
4369	13245.9	13755	3.84	16330.7	13675
5216	14536.9	15015	3.28	16551.5	14800

Tabla B.11: Resultados del método basado en asignación de empleados por etapas, para instancias de 7 días, 50 empleados y 10 actividades (7\_50\_10).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1855	5688.43	<b>6095</b>	7.14	6554.39	<b>6185</b>
2106	6153.77	6820	10.82	7894.14	6525
2435	5505.24	6125	11.25	5938.59	6050
4225	5853.95	6460	10.35	7045.67	6255
9863	5692.41	5960	4.70	8176.38	5870

Tabla B.12: Resultados del método basado en asignación de empleados por etapas, para instancias de 2 días, 75 empleados y 12 actividades (2\_75\_12).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1024	2939.99	2940	0.00034	95.31	2940
1773	2769.99	3065	10.65	91.44	2770
2732	3820	3820	0	76.49	3820
4657	3209.99	3210	0.00031	80.10	3210
5553	3269.99	3270	0.00030	87.68	3270

Tabla B.13: Resultados del método basado en asignación de empleados por etapas, para el segundo conjunto de instancias de 7 días, 20 empleados y 5 actividades (7\_20\_5\_s2).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
342	1843.01	1955	6.07	128.80	1875
369	2270.42	2330	2.62	131.57	2315
71	2049.55	2050	0.021	79.38	2050
737	2000.59	2065	3.21	98.13	2065
896	1806.71	2105	16.51	691.83	1875

Tabla B.14: Resultados del método basado en asignación de empleados por etapas, para el segundo conjunto de instancias de 1 días, 50 empleados y 10 actividades (1\_50\_10\_s2).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
5600	8331.09	8595	3.16	3002.57	8440
592	7310.7	7345	0.46	3618.43	7345
8597	7599.07	7645	0.60	3461.17	7645
9445	7884.13	7930	0.58	2057.16	7900
949	8101.67	8245	1.76	3508.49	8155

Tabla B.15: Resultados del método basado en asignación de empleados por etapas, para las instancias de 7 días, 50 empleados y 7 actividades (7\_50\_7).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
530	14833.4	15445	4.12	48109.7	15200
1024	15043.6	15545	3.33	42349.4	15420
2596	15460.9	16050	3.81	33721.3	15855
6384	14963.7	15555	3.95	35572.2	15250
7862	15503.2	16090	3.78	27041.1	15940

Tabla B.16: Resultados del método basado en asignación de empleados por etapas, para las instancias de 7 días, 100 empleados y 15 actividades (7\_100\_15).

### B.3 TABLAS: MÉTODOS DE ASIGNACIÓN DE TURNOS POR ETAPAS (MATE)

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1024	7179.59	7220	0.56	128.59	7220
1773	6335.02	6800	7.33	104.88	6345
2732	7377.49	8315	12.70	158.98	7420
4657	6290.87	6870	9.20	87.25	6400
5553	7497	8160	8.84	148.15	7535

Tabla B.17: Resultados del método basado en asignación de turnos por etapas, para el primer conjunto de instancias de 7 días, 20 empleados y 5 actividades (7\_20\_5\_s1).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1808	3057.69	3630	18.71	25.8	3270
5066	2358.28	2975	26.15	37.18	2440
5135	2554.16	3285	28.61	33.17	2580
5226	2696.41	4200	55.76	35.75	2725
8854	2623.53	2960	12.82	47.84	2770

Tabla B.18: Resultados del método basado en asignación de turnos por etapas, para el primer conjunto de instancias de 1 días, 50 empleados y 10 actividades (1\_50\_10\_s1).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1007	13842.4	17090	23.46	2826.73	14115
156	13287.9	17430	31.17	3750.26	13420
237	13237.5	16145	21.96	3092.25	13590
4369	13245.9	19450	46.83	3131.16	13675
5216	14536.9	18940	30.28	3228.77	14800

Tabla B.19: Resultados del método basado en asignación de turnos por etapas, para instancias de 7 días, 50 empleados y 10 actividades (7\_50\_10).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1855	5688.43	12170	113.94	1309.5	6185
2106	6153.77	14750	139.69	1676.39	6525
2435	5505.24	10960	99.08	813.89	6050
4225	5853.95	10020	71.16	1212.67	6255
9863	5692.41	12150	113.44	1516.74	5870

Tabla B.20: Resultados del método basado en asignación de turnos por etapas, para instancias de 2 días, 75 empleados y 12 actividades (2\_75\_12).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1024	2939.99	2940	0.0003	5.96	2940
1773	2769.99	2770	0.0003	6.19	2770
2732	3820	4260	11.51	5.52	3820
4657	3209.99	3210	0.0003	6.24	3210
5553	3269.99	3505	7.18	5.07	3270

Tabla B.21: Resultados del método basado en asignación de turnos por etapas, para el segundo conjunto de instancias de 7 días, 20 empleados y 5 actividades (7\_20\_5\_s2).



Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
342	1843.01	2030	10.14	18.6	1875
369	2270.42	2455	8.12	16.96	2315
71	2049.55	2050	0.02	8.31	2050
737	2000.59	2170	8.46	11.67	2065
896	1806.71	2140	18.44	13.9	1875

Tabla B.22: Resultados del método basado en asignación de turnos por etapas, para el segundo conjunto de instancias de 1 días, 50 empleados y 10 actividades (1\_50\_10\_s2).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
5600	8331.09	8970	7.66	211.48	8440
592	7310.7	7640	4.50	271	7345
8597	7599.07	8820	16.06	311.97	7645
9445	7884.13	9875	25.25	131.15	7900
949	8101.67	10740	32.56	292.5	8155

Tabla B.23: Resultados del método basado en asignación de turnos por etapas, para las instancias de 7 días, 50 empleados y 7 actividades (7\_50\_7).

Instancia	Mejor cota lagrangiana	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
530	14833.4	24395	64.45	5875.05	15200
1024	15043.6	25465	69.27	4698.94	15420
2596	15460.9	25230	63.18	4528.68	15855
6384	14963.7	27715	85.21	5772.21	15250
7862	15503.2	18875	21.74	2711.05	15940

Tabla B.24: Resultados del método basado en asignación de turnos por etapas, para las instancias de 7 días, 100 empleados y 15 actividades (7\_100\_15).

## B.4 TABLAS: MÉTODO HÍBRIDO BASADO EN RELAJACIÓN LAGRANGIANA (MH)

Instancia	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1024	7220	0.56	81.49	7220
1773	6345	0.15	86.14	6345
2732	7420	0.57	121.35	7420
4657	6400	1.73	78.36	6400
5553	7535	0.50	106.7	7535

Tabla B.25: Resultados del método híbrido basado en relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 7 días, 20 empleados y 5 actividades (7\_20\_5\_s1).

Instancia	Mejor cota encontrada	Gap (%)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
<b>1808</b>	<b>3225</b>	<b>5.47</b>	<b>71.46</b>	<b>3270</b>
5066	2440	3.46	36.69	2440
5135	2580	1.01	19.12	2580
5226	2725	1.06	20.72	2725
<b>8854</b>	<b>2740</b>	<b>4.43</b>	<b>100.63</b>	<b>2800</b>

Tabla B.26: Resultados del método híbrido basado en relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 1 días, 50 empleados y 10 actividades (1\_50\_10\_s1).

Instancia	Mejor cota encontrada	Gap (%)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
<b>1007</b>	<b>14085</b>	<b>1.75</b>	<b>1157.05</b>	<b>14115</b>
156	13420	0.99	1139.32	13420
<b>237</b>	<b>13455</b>	<b>1.64</b>	<b>875.391</b>	<b>13610</b>
<b>4369</b>	<b>13630</b>	<b>2.89</b>	<b>1703.35</b>	<b>13675</b>
<b>5216</b>	<b>14770</b>	<b>1.60</b>	<b>1171.37</b>	<b>14800</b>

Tabla B.27: Resultados del método híbrido basado en relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 7 días, 50 empleados y 10 actividades (7\_50\_10).

Instancia	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
<b>1855</b>	<b>5960</b>	<b>4.77</b>	<b>5314.58</b>	<b>6265</b>
2106	6540	6.27	2632.76	6525
<b>2435</b>	<b>5850</b>	<b>6.26</b>	<b>1740.24</b>	<b>6050</b>
<b>4225</b>	<b>6150</b>	<b>5.05</b>	<b>1682.04</b>	<b>6255</b>
9863	5870	3.11	868.2	5870

Tabla B.28: Resultados del método híbrido basado en relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 2 días, 75 empleados y 12 actividades (2\_75\_12).

Instancia	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
1024	2940	0.0003	15.73	2940
1773	2770	0.0003	13.24	2770
2732	3820	0	9.9	3820
4657	3210	0.0003	14.22	3210
5553	3270	0.0003	10.88	3270

Tabla B.29: Resultados del método híbrido basado en relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 7 días, 20 empleados y 5 actividades (7\_20\_5\_s2).

Instancia	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
342	1875	1.73	8.02	1875
369	2315	1.96	12.48	2315
71	2050	0.02	4.83	2050
737	2065	3.21	9.73	2065
896	1890	4.61	10.2	1875

Tabla B.30: Resultados del método híbrido basado en relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 1 días, 50 empleados y 10 actividades (1\_50\_10\_s2).

Instancia	Mejor cota encontrada	Gap ( %)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
5600	8440	1.30	200.03	8440
592	7345	0.46	235.63	7345
8597	7645	0.60	275.13	7645
9445	7900	0.20	169.51	7900
949	8155	0.65	275.07	8155

Tabla B.31: Resultados del método híbrido basado en relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 7 días, 50 empleados y 7 actividades (7\_50\_7).

Instancia	Mejor cota encontrada	Gap (%)	Tiempo (s)	Mejor solución reportada
<b>530</b>	<b>15155</b>	<b>2.16</b>	<b>2430.48</b>	<b>15200</b>
1024	15435	2.60	2790.49	15420
<b>2596</b>	<b>15765</b>	<b>1.96</b>	<b>2180.99</b>	<b>15855</b>
<b>6384</b>	<b>15235</b>	<b>1.81</b>	<b>2100.24</b>	<b>15250</b>
<b>7862</b>	<b>15880</b>	<b>2.43</b>	<b>2101.96</b>	<b>15940</b>

Tabla B.32: Resultados del método híbrido basado en relajación lagrangiana, para el primer conjunto de instancias de 7 días, 100 empleados y 15 actividades (7\_100\_15).

# BIBLIOGRAFÍA

---

- E. Balas and M. Carrera. A dynamic subgradient-based branch-and-bound procedure for the set-covering problem. *Operarion Research*, 44:875–890, 1996.
- E. Balas and A. Ho. Set covering algorithms using cutting planes, heuristics, and subgradient optimization: A computational study. *Mathematical Programming Studies*, 12:37–60, 1980.
- J. Bautista and J. Pereira. A grasp algorithm to solve the unicast set covering problem. *Computers ans Operations Research*, 34:3162–3173, 2007.
- J.E. Beasley. A lagrangean heuristic for set-covering problems. *Naval Research Logistics*, 37:151–164, 1990.
- J.E. Beasley. Lagrangean heuristic for location problems. *European Journal of Operational Research*, 65:383–399, 1993.
- J.E. Beasley and P.C. Chu. A genetic algorithm for the set covering problem. *European Journal of Operational Research*, 94:392–404, 1996.
- R.E. Bixby, J.W. Gregory, Lustig I.J., and Marsten R.E. Shanno D.F. Very large-scale linear programming: A case study in combining interior point and simplex methods. *Operations Research*, 40:885–897, 1992.
- M. Böehmer and J. Grüener. Tour scheduling and task assigment of a heterogeneous work force: A model formulation and opl-implementation. Technical report, Universität der Bundeswehr Hamburg, 2003.

- M. Bouchard. Optimisation des pauses dans le problème de fabrication des horaires avec quarts de travail. Master's thesis, École Polytechnique de Montréal, 2004.
- V. Boyer, B. Gendrom, and L.M. Rousseau. A branch-and-price algorithm for the multi-activity multi-task shift scheduling problem. *Journal of Scheduling*, 17:185–197, 2014.
- M. Caserta. *Tabu Search-Based Metaheuristic Algorithm for Large-scale Set Covering Problems*, volume 39 of *Operations Research/Computer Science Interfaces Series*. Springer US, 2007.
- S. Ceria, P. Nobili, and A. Sassano. A lagrangean-based heuristic for large-scale set covering problems. *Mathematical Programming*, 81:215–228, 1998.
- V. Chvatal. A greedy heuristic for the set-covering problem. *Mathematics Of Operations Research*, 4:233–235, 1979.
- J. Cocke and J.T. Schwartz. Programming languages and their compilers: Preliminary notes. Technical report, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1970.
- M.C. Côté, B. Gendron, C. Quimper, and Rousseau L.M. Formal languages for integer programming modeling of shift scheduling problem. *Constraints*, 16:54–76, 2011a.
- M.C. Côté, B. Gendron, and L.M. Rousseau. Grammar-based integer programming models for multiactivity shift scheduling. *Managment Science*, 57:151–163, 2011b.
- M.C. Côté, B. Gendron, and L.M. Rousseau. Grammar-based column generation for personalized multi-activity shift scheduling. *INFORMS Journal on Computing*, 25:461–474, 2013.
- A. Crapara, M. Fischetti, and P. Toth. A heuristic method for the set covering problem. *Operation Research*, 47:730–743, 1999.



- S. Dahmen and M. Rekik. Solving multiactivity personalized shift scheduling problems with a hybrid heuristic. Technical report, CIRRELT, 2012.
- S. Demassey, G. Pesant, and L.M. Rousseau. A cost-regular based hybrid column generation approach. *Constraints*, 11:315–333, 2006.
- A. Ernst, H. Jiang, M. Krishnamoorthy, B. Owens, and D. Sier. An annotated bibliography of personnel scheduling and rostering. *Annals of Operation Research*, 127:21–44, 2004a.
- A. Ernst, H. Jiang, M. Krishnamoorthy, and D. Sier. Staff scheduling and rostering: A review of applications, methods and models. *European Journal of Operational Research*, 153:3–27, 2004b.
- M.L. Fisher. The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management Science*, 27:1–18, 1981.
- M.L. Fisher. An applications oriented guide to lagrangian relaxation. *Interfaces*, 15:2–21, 1985.
- A.M. Geoffrion. Lagrangian relaxation for integer programming. *Mathematical Programming Studies*, 2:82–114, 1974.
- O. Goldschmidt, D. Hochbaum, and G. Yu. A modified greedy heuristic for the set covering problem with improved worst case bound. *Information Processing Letters*, 48:305–310, 1993.
- M. Guignard. Lagrangian relaxation. *Top*, 11:151–200, 2003.
- J.E. Hopcroft, R. Motwanu, and J.D. Ullman. *Introduction to automata theory, languages and computation*. Addison Wesley, 2001.
- A. Imai, E. Nishimura, and Current J. A lagrangian relaxation-based heuristic for the vehicle routing with full container load. *European Journal of Operational Research*, 176:87–105, 2007.

- V. Jeet and Kutanoglu E. Lagrangian relaxation guided problem space search heuristics for generalized assignment problems. *European Journal of Operational Research*, 182:1039–1056, 2007.
- T. Kasami. An efficient recognition and syntax-analysis algorithm for context-free languages. Technical report, Air Force Cambridge Research Lab, Bedford, MA, 1965.
- J. Klinecicz and H. Luss. A lagrangian relaxation heuristic for capacitated facility location with single-source constraints. *The Journal of the Operational Research Society*, 37:495–500, 1986.
- Q. Lequy, M. Bouchard, G. Desaulniers, and F. Soumis. Assigning multiple activities to work shifts. Technical report, Les Cahiers du GERAD G-2009-86 and HEC Montreal, 2009.
- L.A. Lorena and Narciso M.G. Relaxation heuristics for a generalized assignment problem. *European Journal of Operational Research*, 91:600–610, 1996.
- J. Loucks and F. Jacobs. Tour scheduling and task assignment of a heterogeneous work force: a heuristic approach. *Decision Science*, 22:719–739, 1991.
- P.B. Luh and D.J. Hoitom. Scheduling of manufacturing systems using the lagrangian relaxation technique. *Automatic Control*, 38:1066–1079, 1993.
- Z. Omari. Attribution des activités aux employés travaillant sur des quarts. Master’s thesis, École Polytechnique de Montréal, 2002.
- C.G. Quimper and L.M. Rousseau. A large neighbourhood search approach to the multi-activity shift scheduling problem. *Journal of Heuristics*, 16:373–392, 2010.
- C.G. Quimper and T. Walsh. Global grammar constraints. In *Proceedings of the Twelfth International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (CP 2006)*, pages 751–755, 2006.

- C.G. Quimper and T. Walsh. Decomposing global grammar constraint. In *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (CP 2007)*, pages 590–604, 2007.
- L. Ritzman, L. Krajewski, and M. Showalter. The disaggregation of aggregate manpower plans. *Management Science*, 22:1204–1214, 1976.
- M. Sellman. The theory of grammar constraints. In *Proceedings of the Twelfth International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (CP 2006)*, pages 530–544, 2006.
- N. Shor. *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*, volume 3 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, 1985.
- M. Sipser. *Introduction to the theory of computation*. Course Technology, 2006.
- S. Umetani and M. Yagiura. Relaxation heuristics for the set covering problem. *Journal of the Operations Research*, 50:350–375, 2007.
- E. Vatri. Intégration de la génération de quart de travail et de l’attribution d’activités. Master’s thesis, École Polytechnique de Montréal, 2001.
- M Yagiura, M Kishida, and T Ibaraki. A 3-flip neighborhood local search for the set covering problem. *European Journal of Operational Research*, 172:472–499, 2006.
- D.H. Younger. Recognition and parsing of context-free languages in time  $n^3$ . *Information and Control*, 10:189–208, 1967.

# FICHA AUTOBIOGRÁFICA

---

Norberto Alejandro Hernández Leandro

Candidato para el grado de Maestro en Ciencias  
en Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

MÉTODOS CONSTRUCTIVOS BASADOS EN  
RELAJACIÓN LAGRANGIANA PARA EL  
PROBLEMA DE PLANEACIÓN DE HORARIOS A  
EMPLEADOS

Nací un 24 de junio de 1989 en la ciudad de Saltillo, Coahuila. Primogénito del Sr. Roberto Hernández Carrillo y la Sra. Rosa Elba Leandro Covarrubias. En 2010, me gradué de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila obteniendo el grado de Licenciado en Matemáticas Aplicadas. En enero de 2013 decido iniciar mis estudios de posgrado en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Durante estos estudios, realicé una estancia en Montreal, Canadá, bajo la supervisión del Prof. Louis-Martin Rousseau. Culminando mis estudios de posgrado con este trabajo de investigación bajo la asesoría del Dr. Vincent Boyer.